МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ І НАУКИ
ВИКОНАВЧОГО ОРГАНУ КИЇВСЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ
(КИЇВСЬКОЇ МІСЬКОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ)

КИЇВСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
(КИЇВСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК)

відділення: математика
секція: математичне моделювання

НЕРІВНІСТЬ КАРАМАТИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Роботу виконала:
Козаровицька Поліна Євгенівна,
учениця 11-Б класу
Русанівського ліцею
Дніпровського району м. Києва

Науковий керівник:
Яковлєв Сергій Володимирович,
кандидат технічних наук,
доцент кафедри
математичних методів захисту
інформації
Фізико-технічного інституту
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Педагогічний керівник:
Афанасьєв Даніїл Олександрович,
студент КНУ ім. Тараса Шевченка

КИЇВ – 2019

НЕРІВНІСТЬ КАРАМАТИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Козаровицька Поліна Євгенівна; Київське територіальне відділення МАНУ; КПНЗ «Київська Мала академія наук учнівської молоді»; Русанівський ліцей, 11-Б клас; м. Київ; **науковий керівник**: Яковлєв Сергій Володимирович, к. т. н., доцент кафедри математичних методів захисту інформації Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського; **педагогічний керівник:** Афанасьєв Даніїл Олександрович, студент КНУ імені Тараса Шевченка.

Дана робота присвячена відношенню мажоризації та тісно пов'язаній з ним нерівності Карамати. Тема дослідження є актуальною, оскільки мажоризація широко використовується у моделях теорії прийняття рішень, економіки, екології, соціальних наук, а нерівність Карамати є зручним інструментом для розв'язання широкого спектру задач, який дозволяє встановити нетривіальні залежності між досліджуваними величинами та модельними параметрами.

Метою роботи є дослідження властивостей відношення мажоризації та застосування нерівності Карамати для одержання співвідношень між різними видами мажоритарно пов'язаних величин.

У першому розділі наведено базові поняття про відношення мажоризації, а також нерівність Карамати та її доведення.

У другому розділі розглянуто та доведено за допомогою нерівності Карамати так звану транснерівність та декілька її уточнень та аналогів.

У третьому розділі проілюстровано ефективність використання нерівності Карамати при доведенні задачах олімпіадного рівня та наведено декілька нових співвідношень, одержаних автором. Також у розділі введене поняття мажоруючих трикутників та досліджено їх властивості, що показало застосовність поняття мажоризації та нерівності Карамати в геометрії.

Результати роботи можна використовувати для пошуку залежностей та співвідношень між мажоритарно пов'язаними величинами при дослідженні відповідних моделей у різних галузях науки.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$X \succ Y$ – набір X мажорує набір Y;

$X \succ_{w} Y$ – набір X слабко мажорує набір Y;

a, b, c – довжини сторін BC, AC, AB трикутника ABC відповідно;

S – площа трикутника;

P – периметр трикутника;

p – півпериметр трикутника;

r – радіус вписаного кола трикутника;

α, β, γ – кути трикутника ABC, які лежать навпроти сторін BC, AC, AB відповідно;

r_a, r_b, r_c – радіуси зовнівписаних кіл трикутника ABC, які дотикаються до сторін BC, AC, AB відповідно.

ВСТУП

Нерівність Карамати широко використовується для доведення багатьох нерівностей та теорем. Ця нерівність базується на понятті мажоризації, яке набуло широкого застосування як в сучасній математиці, так і в інших галузях науки, таких як теорія прийняття рішень, статистика, економіка, біологія, медицина тощо.

Свою назву нерівність отримала на честь Йована Карамати, відомого сербського математика. Карамата зробив вагомий внесок у науку, адже за своє життя він опублікував сім книжок та понад сто двадцять дві наукові праці. Його наукові здобутки стосуються теорії ймовірностей та математичного аналізу, зокрема, дослідження характеру опуклості функції та її властивостей [7]. Уперше свою нерівність він опублікував у роботі [14].

Нерівність Карамати відрізняється від більшості класичних нерівностей, оскільки вона стоїть на межі алгебри та математичного аналізу. Саме цим пояснюється її універсальність та широке застосування. Велика кількість математиків досліджувала нерівність Карамати та робила різноманітні узагальнення (див. [9], [10], [11], [15]). Найбільш відомими джерелами є класичні монографії А. Маршалла, І. Олкіна та Г.Г. Харді, Дж.Е. Літтлвуда, Д. Пойа (цікаво, що інколи їм навіть приписують авторство цієї нерівності).

Тема роботи є актуальною, оскільки відношення мажоризації знаходить численні застосування у різноманітних галузях, в той час як нерівність Карамати є зручним інструментом для розв’язання широкого спектру задач різного рівня складності, а також дозволяє значно спростити доведення відомих теорем і формулювати та знаходити нові співвідношення. Незважаючи на те, що нерівність Карамати не входить до курсу шкільної програми, її варто використовувати як матеріал для математичних гуртків та поширювати серед учнів фізико-математичних ліцеїв та всіх, хто цікавиться даними розділами математики.

Метою роботи є дослідження властивостей відношення мажоризації та застосування нерівності Карамати для одержання співвідношень між різними видами мажоритарно пов'язаних величин. Для досягнення мети необхідно розв'язати такі **задачі дослідження**:

1) провести огляд опублікованих джерел за тематикою даного дослідження;

2) показати застосування поняття мажоризації в аналізі деяких моделей з різних галузей науки;

3) показати застосування нерівності Карамати для аналізу мажоритарно пов'язаних величин; одержати нові та довести відомі співвідношення та нерівності за допомогою нерівності Карамати;

4) розглянути трикутники, сторони яких утворюють мажоруючі послідовності, в якості простого модельного прикладу та проаналізувати зв'язок між параметрами таких трикутників.

Об'єктом дослідження є математичні співвідношення та нерівності.

Предметом дослідження є нерівність Карамати та її застосування.

Наукова новизна. У роботі було сформульовано та доведено декілька нових нерівностей (у вигляді авторських задач). Вперше введено поняття мажоризації трикутників та досліджено деякі співвідношення між параметрами таких трикутників. Для деяких нерівностей (зокрема, мажоритарної форми транснерівності та функціонального узагальнення транснерівності) було одержано самостійні доведення, які ґрунтуються на інших ідеях, аніж відомі.

Практичне значення. Результати даної роботи можна використовувати для пошуку залежностей та співвідношень між мажоритарно пов'язаними величинами при дослідженні відповідних моделей у різних галузях науки, а також для доведення відомих нерівностей та пошуку нових математичних співвідношень. Матеріали роботи будуть корисними для підготовки учнів математичних гуртків до наукової діяльності та до участі в математичних олімпіадах та боях.

РОЗДІЛ 1
МАЖОРИЗАЦІЯ ТА НЕРІВНІСТЬ КАРАМАТИ

У даному розділі будуть введені поняття мажоризації, слабкої мажоризації та наведені приклади їх застосування. Також буде сформульована та доведена нерівність Карамати, яка базується на властивості опуклості функції.

1.1. Відношення мажоризації та його застосування

Означення 1.1 [14]. Нехай дано два впорядкованих набори дійсних чисел $X = (x_1,\ x_2, \dots , x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, \dots , y_n\ )$. Кажуть, що набір *X мажорує* набір *Y* тоді, коли:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i\ ,\ k = 1, \dots , n - 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\ .$$

Означення 1.2 [10]. Якщо в умовах означення 1.1 в замість останньої рівності виконується лише нерівність $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i$, кажуть, що набір *X слабко мажорує* набір *Y*.

Введене поняття мажоризації має дуже різноманітні застосування. Вперше це поняття було використано в економіці в роботі [14]. Проте за останні роки область його застосування значно розширилась і тепер використовується в математичній статистиці, у теорії графів, у математичних моделях спортивних змагань, виникає в економіці, екології та навіть у медицині (для порівняння ймовірностей передачі інфекції в замкнених популяціях). Докладний огляд можливих застосувань був зроблений у [1].

Розглянемо, як мажоризація може бути застосована для опису проблеми розподілу місць у парламенті після виборів. При пропорційному розподілу місць у відповідності до результатів виборів виникає необхідність округлення дробових чисел. Існує декілька способів розподілу місць, одні більш вигідні великим партіям, інші – малим. Виявляється, що найбільш популярні способи розподілу місць можуть бути описані за допомогою універсальної формули $s_p(k) = \left(\frac{k^p}{2} + \frac{(k+1)^p}{2}\right)^{1/p}$, де $s(k)$ – деяка зростаюча функція. Правило розподілу полягає в тому, що кількість голосів a в інтервалі $[k, k+1]$ округлюється до k якщо $a < s_p(k)$ і округлюється до $k+1$ у протилежному випадку. Відповідно, різні розподіли задаються різними значеннями p, і виявляється, що розподіл для p_1 мажорує розподіл для p_2 тоді й тільки тоді, коли $p_1 \geq p_2$. З цього випливає, що розподіли, вигідні великим партіям, мажорують розподіли, вигідні малим.

Інший приклад, описаний у [1], ілюструє застосування поняття мажоризації в епідеміології. Розглянемо замкнену популяцію, що складається з n носіїв інфекції та одної неінфікованої особи A. Якщо A контактує з особою i , то ймовірність уникнути інфекції дорівнює p_i. Позначимо $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Будемо вважати, що A має загалом J контактів з іншими особами за наступною схемою. На кроці l A обирає одного з n партнерів у відповідності до розподілу ймовірностей $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ і має з ним k_l контактів, $\sum_{l=1}^{J} k_l = J$. Коли всі J контактів здійснені, процес закінчується. Вектор $\bar{k} = \left(k_1, k_2, \dots, k_J\right)$ називають «вектором способу життя».

Позначимо через $H\left(\bar{k}, \bar{\alpha}, \bar{p}\right)$ ймовірність уникнути інфекції після здійснення всіх J контактів. Легко вказати два «крайні» значення вектору способу життя: $k_0 = (J, 0,\ 0, \dots, 0)$, який можна назвати «моногамним» (згідно з ним всі контакти здійснюються з партнером, обраним на першому кроці), та $k_1 = (1,1, \dots, 1)$, (згідно з яким на кожному кроці відбувається один контакт). Зрозуміло, що $H(k_0, \alpha, p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i^J$, $H\ (k_1, \alpha, p) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\right)^J$ і з нерівності Єнсена випливає очевидний із загальних міркувань висновок, що $H(k_0, \alpha, p) \geq$ $\geq H\ (k_1, \alpha, p)$, тобто «моногамний» спосіб життя допомагає уникати інфекцій.

Втім, справедливий і більш загальний результат: якщо вектор способу життя k_i мажорує інший вектор, то й відповідна йому імовірність уникнути інфекції також буде вище.

Ще одним прикладом використання мажоризації може бути модель чемпіонату з певної гри, у якому беруть участь n команд. Моделлю цієї гри буде квадратна матриця $P = (p_{ij})$ розміром $k \times k$, у якій p_{ij} для кожних $i \neq j$ позначає ймовірність того, що команда i переможе команду j (для визначеності покладемо також $p_{ii} = 1$). Будемо вважати, що нічиєї бути не може, тому $p_{ij} + p_{ji} = 1$. Доцільно припустити, що матриці гри мають бути транзитивними, тобто якщо команда i сильніша за команду j (при $p_{ij} \geq 0.5$), яка, в свою чергу, сильніша за команду k, то й команда i повинна бути сильнішою за команду k. Зокрема, матриця P називається сильно транзитивною [3], якщо з умови, що $p_{ij} \geq 0.5$ та $p_{jk} \geq 0.5$ випливає, що $p_{ik} \geq \max\{p_{ij},\ p_{jk}\}$.

Сила i-ї команди визначається як сума елементів у i-му рядку матриці гри. Описаній матриці гри P буде відповідати вектор сили P^*, елементи якого дорівнюють силі відповідної команди (фактично, вектор P^* обчислюється як сума усіх стовпчиків матриці P). Матриця P є мінімальною, якщо з умови $P^* \succ Q^*$ випливає, що $P = Q$. У [3] було доведено, що будь-яка сильно транзитивна матриця є мінімальною.

Серед суто математичних властивостей відношення мажоризації наборів виокремимо наступну, яка буде використовуватись нами в подальшій роботі.

Властивість 1.1 [10]. Нехай дано впорядковані набори додатних чисел $X = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ та $Y = \left(\frac{b}{n}, \frac{b}{n}, \dots, \frac{b}{n}\right)$ такі, що $\sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{bk}{n}$. Тоді $X \succ Y$.

1.2. Нерівність Карамати та її доведення

Теорема 1.1 (Нерівність Карамати) [4]. Для будь-якої опуклої вниз функції $f(x)$, яка визначена на певному проміжку I, та для будь-яких упорядкованих наборів дійсних чисел $X = (x_1,\ x_2, \dots, x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ з цього ж проміжку, таких, що $X \succ Y$, виконується нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(y_i). \qquad (1.1)$$

Доведення даної теореми викладемо відповідно до [15]. Для доведення знадобиться така лема.

Лема 1.1 [15]. Для будь-якої опуклої вниз функції $f(x)$ функція $g(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ зростає за кожним аргументом.

Доведення. Оскільки функція симетрична, можна довести цю лему лише для першого аргументу. Нехай $x < y < z$. Покажемо, що $g(z, x) < g(z, y)$, тобто, що

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Оскільки $z - x > 0,\ z - y > 0$, отримуємо:

$$(y - x)f(z) + (z - y)f(x) \geq (z - x)f(y).$$

Через те, що $z - x > 0$, маємо:

$$\frac{y-x}{z-x} f(z) + \frac{z-y}{z-x} f(x) \geq f(y). \qquad (1.2)$$

Ця нерівність справджується, оскільки функція f опукла за умовою. Щоб довести лему, достатньо виконати всі перетворення в зворотному порядку. ■

Зауваження. Якщо функція f опукла вверх, то функція g є спадаючою за кожним аргументом.

Тепер перейдемо до безпосереднього доведення нерівності Карамати. Для цього необхідно показати, що різниця

$$f(x_1) + f(x_2) + \ \dots + f(x_n) - f(y_1) - f(y_2) - \ \dots - f(y_n)$$

є невід'ємною.

Нехай $X_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$, $X_0 = 0$, $Y_k = \sum_{i=1}^{k} y_i$, $Y_0 = 0$, $z_i = \frac{f(y_i)-f(x_i)}{y_i-x_i}$, якщо $y_i \neq x_i$, та $z_i = 0$, якщо $y_i = x_i$.

За допомогою перетворення Абеля отримуємо:

$$f(x_1) + f(x_2) + \ \dots + f(x_n) - f(y_1) - f(y_2) - \ \dots - f(y_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x_i - y_i) =$$

$$= z_n(X_n - Y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (z_i - z_{i+1})(X_i - Y_i)\,.$$

Розглянемо вираз

$$z_n(X_n - Y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (z_i - z_{i+1})(X_i - Y_i). \tag{1.3}$$

Оскільки $X_i \geq Y_i$, $z_i \geq z_{i+1}$ та $X_n = Y_n$, цей вираз є невід'ємним, що й треба було довести. ■

Зауваження. Необхідно зазначити, що нерівність буде виконуватись і для функції, опуклої вверх. Тоді вираз (1.3) буде від'ємним, відповідно й знак нерівності буде напрямлений у протилежний бік:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i).$$

Теорема 1.2 (Узагальнення нерівності Карамати) [10]. Якщо в умовах теореми 1.1 функція зростає, то співвідношення (1.1) виконується і в тому випадку, коли $X \succ_{\mathrm{w}} Y$.

Для доведення цього факту достатньо використати вираз (1.3). Оскільки функція зростає, то $z_n \geq 0$. Тому нерівність Карамати буде виконуватись і при $X_n \geq Y_n$.

Висновки до розділу 1

У даному розділі було сформульовано означення відношення мажоризації та показано його застосування в моделях біології та економіки. Також було наведено нерівність Карамати та її доведення. У наступних розділах буде показано застосування цієї нерівності для розв'язання задач різного рівня складності.

РОЗДІЛ 2
ДОВЕДЕННЯ ТРАНСНЕРІВНОСТІ ТА ЇЇ УЗАГАЛЬНЕНЬ

У даному розділі будуть наведені альтернативні доведення деяких відомих нерівностей за допомогою нерівності Карамати, а також приведене функціональне узагальнення транснерівності.

2.1. Транснерівність для двох та декількох послідовностей

Теорема 2.1 (Транснерівність) [14]. Для будь-яких послідовностей чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ \dots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \ \dots \geq b_n$ та будь-якої перестановки $c_1, c_2, \dots, c_n$ чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливі нерівності:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}.$$

Доведення [10]. Спочатку покажемо, що перша нерівність справджується для додатних чисел. Позначимо:

$$x_i = \ln a_i,\ \ y_i = \ln b_i,\ \ z_i = \ln c_i,\ \ i = 1,2, \dots n.$$

Оскільки $f(x) = \ln x$ зростає на всій області визначення, то:

$$x_1 \geq x_2 \geq \ \dots \ \geq x_n,\ y_1 \geq y_2 \geq \ \dots \ \geq y_n.$$

Розглянемо набори чисел $X = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots,\ x_n + y_n)$ та $Y = (x_1 + z_1,\ x_2 + z_2, \dots,\ x_n + z_n)$. Щоб затосувати нерівність Карамати, впорядкуємо набір Y та одержимо набір $Y' = (x_{i_1} + z_{i_1},\ x_{i_2} + z_{i_2}, \dots,\ x_{i_n} + z_{i_n})$.

Очевидно, що

$$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq x_{i_1} + z_{i_1}; \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \geq x_{i_1} + z_{i_1} + x_{i_2} + z_{i_2}; \\ \dots \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \ \dots + x_{n-1} + y_{n-1} \geq \\ \geq x_{i_1} + z_{i_1} + x_{i_2} + z_{i_2} + \ \dots \ + x_{i_{n-1}} + z_{i_{n-1}}; \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \ \dots + x_n + y_n = x_{i_1} + z_{i_1} + x_{i_2} + z_{i_2} + \ \dots \ + x_{i_n} + z_{i_n}. \end{cases}$$

І, таким чином, $X \succ Y'$.

Застосуємо нерівність Карамати до наборів X, Y' та функції $f(x) = e^x$:

$$e^{\ln a_1 + \ln b_1} + e^{\ln a_2 + \ln b_2} + \ldots + e^{\ln a_n + \ln b_n} \geq$$

$$\geq e^{\ln a_1 + \ln c_1} + e^{\ln a_2 + \ln c_2} + \ldots + e^{\ln a_n + \ln c_n}.$$

Оскільки вираз $e^{\ln x} = x$ справедливий для всіх $x > 0$, отримуємо те, що мали довести.

Щоб довести першу нерівність у загальному випадку, достатньо обрати таке додатне число M, що всі числа $a_i' = a_i + M$ та $b_i' = b_i + M$ будуть додатними, й застосувати щойно доведену нерівність до наборів (a_i') та $(b_i{}')$. Щоб показати справедливість другої нерівності, достатньо застосувати першу нерівність до наборів $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ та $-b_n \geq -b_{n-1} \geq \ldots \geq -b_1$. ■

Транснерівність можна узагальнити для довільної кількості послідовностей.

Теорема 2.2 (Узагальнення транснерівності) [8]. Для будь-яких k послідовностей додатних чисел

$$a_1^{(1)} \geq a_2^{(1)} \geq \ldots \geq a_n^{(1)}, a_1^{(2)} \geq a_2^{(2)} \geq \ldots \geq a_n^{(2)}, \ldots, a_1^{(k)} \geq a_2^{(k)} \geq \ldots \geq a_n^{(k)},$$

де $a_n^{(k)} -$ n-й елемент k-ої послідовності та будь-яких перестановок $c_1^{(j)}, \ldots, c_n^{(j)}$ чисел $a_1^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)}$ $(j = 2, \ldots, k)$ справедлива нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} a_i^{(j)} \geq \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(1)} \prod_{j=2}^{k} c_i^{(j)} \right).$$

Доведення цієї нерівності аналогічне доведенню теореми 2.1.

Теорема 2.3 (Аналог транснерівності) [8]. Для будь-якої опуклої вниз функції $f(x)$, яка визначена на певному проміжку I, будь-послідовностей додатних чисел з цього ж проміжку $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ та будь-якої перестановки $c_1, c_2, \ldots, c_n$ чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедлива нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i + b_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(a_i + c_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(a_i + b_{n-i+1}).$$

Доведення. Розглянемо набори чисел:

$$X = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n); Y = (a_1 + c_1, a_2 + c_2, \ldots, a_n + c_n).$$

Упорядкуємо набір Y і отримаємо набір:

$$Y' = \left(a_{i_1} + c_{i_1}, a_{i_2} + c_{i_2}, \dots, a_{i_n} + c_{i_n}\right)$$

Очевидно, що $X \succ Y'$. Тепер, якщо застосувати нерівність Карамати до наборів X, Y' та функції $f(x)$, то одержимо твердження теореми. ■

Зазначимо, що в [13] розглянуто окремий випадок теореми 2.3, а саме:

$$(a_1 + c_1)(a_2 + c_2) \dots (a_n + c_n) \geq (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n).$$

Для доведення цієї нерівності достатньо в теоремі 2.3 покласти $f(x) = \ln x$.

2.2. Функціональне узагальнення транснерівності

Транснерівність, або нерівність перестановок, завжди приваблювала математиків, тому існує велика кількість її різноманітних узагальнень ([2, 5, 8, 13, 14]). Одне з них було наведене в п. 2.1 (теорема 2.2). У даному підрозділі буде наведено ще одне, функціональне узагальнення транснерівності.

Лема 2.1 (Мажоритарна форма транснерівності) [10]. Для будь яких додатних чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, будь-якої перестановки $c_1, c_2, \dots, c_n$ чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, будь-якої перестановки $d_1, d_2, \dots, d_n$ чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ та будь-якого натурального k, $1 \leq k \leq n$, справедлива нерівність:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k \geq c_1 d_1 + c_2 d_2 + \dots + c_k d_k. \qquad (2.1)$$

Доведення. Оскільки $c_1, c_2, \dots, c_n$ – перестановка набору $a_1, a_2, \dots, a_n$, а $d_1, d_2, \dots, d_n$ – перестановка набору $b_1, b_2, \dots, b_n$, можемо переписати нерівність (2.1) наступним чином:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k \geq b_{j_1} a_{i_1} + b_{j_2} a_{i_2} + \dots + b_{j_k} a_{i_k}. \qquad (2.2)$$

Поділимо добутки правої частини на чотири групи.

1. Добутки $a_{i_m} b_{j_m}$, у яких $i_m, j_m \in [1; k]$.
2. Добутки $a_{i_m} b_{j_m}$, у яких $i_m \notin [1; k]$, $j_m \in [1; k]$,

3. Добутки $a_{i_m}b_{j_m}$, у яких $i_m \in [1;k]$, $j_m \notin [1;k]$.

4. Добутки $a_{i_m}b_{j_m}$,у яких $i_m, j_m \notin [1;k]$.

Застосуємо транснерівність до наборів $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$, $b_1 \geq b_2 \geq \geq \ldots \geq b_k$ так, щоб у правій частині утворилися всі добутки першої групи, а інші нехай утворяться довільним чином. Позначимо вираз, який утворився в правій частині транснерівності через Т. Далі будемо доводити, що вираз Т не менше правої частини нерівності (2.2), окремо порівнюючи добутки кожної групи.

Спочатку зауважимо, що всі добутки першої групи входять до Т.

Тепер розглянемо члени другої групи. Оскільки $j_m \in [1;k]$, то b_{j_m} – одне з чисел набору $b_1, b_2, \ldots, b_k$. У виразі Т воно ввійшло до добутку $a_l b_{j_m}$, $l \in [1;k]$. Оскільки $i_m \notin [1;k]$, і набір $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є впорядкованим, $a_{i_m} \leq a_l$. Тому й $a_l b_{j_m} \geq a_{i_m} b_{j_m}$.

Аналогічні міркування використаємо при розгляданні членів третьої групи.

Перейдемо до членів четвертої групи. Оскільки $i_m, j_m \notin [1;k]$, і набори $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ є впорядкованими, $\forall\, t, l \in [1;k]$, $a_t b_l \geq a_{i_m} b_{j_m}$. Ця нерівність дозволяє порівняти добутки $a_{i_m}b_{j_m}$ з тими добутками з виразу Т, які ще не використовувались.

Якщо додати члени всіх груп, отримаємо, що права частина нерівності (2.2) менше Т, а Т, в свою чергу, менше лівої частини нерівності (2.2). Нерівність доведено. ■

Наведене доведення було самостійно одержано автором і не використовує специфічного математичного апарату. Доведення твердження леми 2.1 у [10] побудовано на інших ідеях, які перекликаються із доведенням теореми 2.1.

Наслідок. В позначеннях леми 2.1 набір $(a_i b_i)$ слабко мажорує набір $(c_i d_i)$; якщо ж додатково $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i$, то набір $(a_i b_i)$ мажорує набір $(c_i d_i)$

Теорема 2.4 (Функціональне узагальнення транснерівності) [5]. Для будь-якої зростаючої опуклої вниз функції $f(x)$, яка визначена на певному проміжку I, для будь-яких дійсних чисел з цього ж проміжку $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq\geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \geq 0$ та будь-якої перестановки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$ справедлива нерівність:

$$f(x_1y_1) + f(x_2y_2) + \ldots + f(x_ny_n) \geq f(x_1z_1) + f(x_2z_2) + \ldots + f(x_nz_n).$$

Доведення. Розглянемо набори:

$$X = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n);$$

$$Y = (x_1z_1, x_2z_2, \ldots, x_nz_n).$$

Очевидно, що набір X є впорядкованим. Упорядкуємо довільним чином набір Y і отримаємо набір $Y' = \left(x_{i_1}z_{i_1},\ x_{i_2}z_{i_2}, \ldots, x_{i_n}z_{i_n}\right)$.

Оскільки всі числа невід'ємні, можемо застосувати лему 2.1 та наслідок з неї до наборів $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$, перестановки $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перестановки $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_n}$ чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Отже, набір X слабко мажорує набір Y'. Застосуємо теорему 1.2 до наборів X, Y' та функції $f(x)$:

$$f(x_1y_1) + f(x_2y_2) + \ldots + f(x_ny_n) \geq f(x_1z_1) + f(x_2z_2) + \ldots + f(x_nz_n),$$

що й треба було довести. ■

Твердження теореми 2.4 має різноманітні застосування в різних галузях науки, наприклад у теорії прийняття рішень.

Висновки до розділу 2

У даному розділі сформульовано та доведено транснерівність та декілька її узагальнень, які природним чином виникають при дослідженні мажоруючих послідовностей. Показано, наскільки ефективно в задачах такого типу застосовується нерівність Карамати. Усі доведення було одержано автором самостійно.

РОЗДІЛ 3
ЗАСТОСУВАННЯ НЕРІВНОСТІ КАРАМАТИ

У даному розділі на прикладі різноманітних задач та декількох теоретичних результатів показано доречність та ефективність методу доведення нерівностей за допомогою нерівності Карамати. Крім цього, введено та досліджене нове поняття мажоризації трикутників.

3.1. Задачі на застосування нерівності Карамати

Задача 3.1 (Shortlist Міжнародної математичної олімпіади, 2000 р.). Для додатних чисел a, b, c, добуток яких дорівнює 1, виконується нерівність:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \le 1.$$

Розв'язання. Оскільки добуток цих чисел за умовою дорівнює 1, можемо зробити наступну заміну:

$$a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}, \text{ де } x, y, z > 0.$$

Отримуємо:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) = \frac{(x-y+z)}{y}\frac{(x-z+y)}{z}\frac{(y-x+z)}{x}.$$

Тепер перепишемо те, що необхідно довести наступним чином:

$$(x-y+z)(x-z+y)(y-x+z) \le xyz.$$

Не обмежуючи загальності можна припустити, що $x \ge y \ge z$, а отже й

$$x+y-z \ge 0,\ x-y+z \ge 0.$$

Якщо $y-x+z \le 0$, то нерівність буде виконуватись, адже її ліва частина буде недодатною, а права додатною. Припустимо, що $y+z-x \ge 0$.

Розглянемо набори чисел $X = (x+y-z, x+z-y, y+z-x)$, $Y = (x, y, z)$. Запишемо такі нерівності:

$$\begin{cases} x+y-z \geq x; \\ x+y-z+x+z-y \geq x+y; \\ x+y-z+\ x+z-y+\ y+z-x = x+y+z. \end{cases}$$

Відповідно, $X \succ Y$. Тепер застосуємо нерівність Карамати до цих наборів та функції $f(x) = \ln x$. Звідси випливає твердження задачі.

Задача 3.2 (авторська). Для будь-яких додатних чисел x, y, z та натурального числа $k \geq 2$ виконується нерівність:

$$x^{k^2x} \cdot y^{k^2y} \cdot z^{k^2z} \geq x^{(k-2)^2x+2x+y(2k-3)+z(2k-3)} \times$$
$$\times\, y^{(k-2)^2y+2y+z(2k-3)+x(2k-3)} \cdot z^{(k-2)^2z+2z+y(2k-3)+x(2k-3)}.$$

Розв'язання. Не обмежуючи загальності можемо вважати, що $x \geq y \geq z$. Розглянемо наступні набори чисел:

$$X = (kx, ky, kz),\ Y = ((k-2)x+y+z, (k-2)y+x+z, (k-2)z+y+x).$$

Нескладно показати, що $X \succ Y$. Тепер застосуємо нерівність Карамати до цих наборів та функції $f(x) = x\ln x$, яка є опуклою вниз на проміжку $x\ \in\ (0; +\infty)$. Одержуємо:

$$k^{kx+ky+kz} \cdot x^{kx} \cdot y^{ky} \cdot z^{kz} \geq \left((k-2)x+y+z\right)^{(k-2)x+y+z} \times$$
$$\times \left((k-2)y+x+z\right)^{(k-2)y+x+z} \cdot \left((k-2)z+y+x\right)^{(k-2)z+y+x}.$$

До кожного множника правої частини застосуємо нерівність Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним для k чисел:

$$\left((k-2)x+y+z\right)^{(k-2)x+y+z} \cdot \left((k-2)y+x+z\right)^{(k-2)y+x+z} \times$$
$$\times \left((k-2)z+y+x\right)^{(k-2)z+y+x} \geq (k\sqrt[k]{x^{(k-2)}yz}\,)^{(k-2)x+y+z} \times$$
$$\times\, (k\sqrt[k]{y^{(k-2)}xz}\,)^{(k-2)y+z+x} \cdot (k\sqrt[k]{z^{(k-2)}yx}\,)^{(k-2)z+y+x}$$

Підставимо отримані значення:

$$k^{kx+ky+kz}x^{kx}y^{ky}z^{kz} \geq k^{kx+ky+kz}x^{\frac{(k-2)^2x+2x+y(2k-3)+z(2k-3)}{k}} \times$$
$$\times\, y^{\frac{(k-2)^2y+2y+z(2k-3)+x(2k-3)}{k}} \cdot z^{\frac{(k-2)^2z+2z+y(2k-3)+x(2k-3)}{k}}.$$

Після нескладних перетворень отримуємо:

$$x^{k^2x} \cdot y^{k^2y} \cdot z^{k^2z} \geq x^{(k-2)^2x+2x+y(2k-3)+z(2k-3)} \cdot y^{(k-2)^2y+2y+z(2k-3)+x(2k-3)} \times$$
$$\times\, z^{(k-2)^2z+2z+y(2k-3)+x(2k-3)}.$$

Зауваження. При $k = 2$ нерівність набуває наступного вигляду:

$$x^{4x} \cdot \ y^{4y} \cdot z^{4z} \geq x^{2x+y+z} \cdot y^{2y+x+z} \cdot z^{2z+x+y}.$$

Задача 3.3 (авторська). Для будь-яких додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ виконується нерівність:

$${x_1}^{(n-1)^2 x_1 + S - x_1} \cdot {x_2}^{(n-1)^2 x_2 + S - x_2} \cdot \dots \cdot {x_n}^{(n-1)^2 x_n + S - x_n} \geq P^{S(n-1)},$$

де $S = x_1 + x_2 + \ \dots + x_n, \ \ P = x_1 x_2 \dots x_n, n \neq 1$

Розв'язання. Не обмежуючи загальності можна припустити, що $x_1 \geq x_2 \geq$ $\geq \ \dots \ \geq x_n$. Розглянемо наступні набори чисел:

$$X = \Big(x_1(n-1), \ x_2(n-1), \dots, \ x_n(n-1)\Big), Y = (S - x_n, \ S - x_{n-1}, \dots, \ S - x_1).$$

Очевидно, що $X \succ Y$. Тепер застосуємо нерівність Карамати до цих наборів та функції $f(x) = x\ln x$, яка є опуклою вниз на проміжку $(0; +\infty)$.

$$(n-1)^{S(n-1)} \cdot {x_1}^{(n-1)x_1} \cdot {x_2}^{(n-1)x_2} \dots \cdot {x_n}^{(n-1)x_n} \geq$$
$$\geq (S - x_1)^{S - x_1} \cdot (S - x_2)^{S - x_2} \cdot \dots \cdot (S - x_n)^{S - x_n}.$$

До кожного множника правої частини застосуємо нерівність Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним:

$$(S - x_i)^{S - x_i} \geq \left((n-1) \ \sqrt[n-1]{\frac{P}{x_i}} \right)^{S - x_i} = \left((n-1) \sqrt[n-1]{\frac{P}{x_i}} \right)^{S - x_i}.$$

Перетворимо таким самим чином кожний множник правої частини нерівності:

$$(S - x_1)^{S - x_1} \cdot (S - x_2)^{S - x_2} \cdot \dots \cdot (S - x_n)^{S - x_n} \geq$$
$$\geq (n-1)^{S(n-1)} \cdot \left(\frac{P}{x_1}\right)^{\frac{S - x_1}{n-1}} \cdot \left(\frac{P}{x_2}\right)^{\frac{S - x_2}{n-1}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{P}{x_n}\right)^{\frac{S - x_n}{n-1}}.$$

Підставимо отримані значення:

$$(n-1)^{S(n-1)} \cdot {x_1}^{(n-1)x_1} \cdot {x_2}^{(n-1)x_2} \cdot \dots \cdot {x_n}^{(n-1)x_n} \geq$$
$$\geq (n-1)^{S(n-1)} \cdot \left(\frac{P}{x_1}\right)^{\frac{S - x_1}{n-1}} \cdot \left(\frac{P}{x_2}\right)^{\frac{S - x_2}{n-1}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{P}{x_n}\right)^{\frac{S - x_n}{n-1}}.$$

Після нескладних перетворень отримуємо шукану нерівність:

$${x_1}^{(n-1)^2 x_1 + S - x_1} \cdot {x_2}^{(n-1)^2 x_2 + S - x_2} \cdot \dots \cdot {x_n}^{(n-1)^2 x_n + S - x_n} \geq P^{S(n-1)}.$$

Задача 3.4 (авторська). Для будь-яких чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 1$, $b_1 \geq\geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ та будь-якої перестановки $c_1, c_2, \ldots, c_n$ чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедлива нерівність:

$$a_1^{b_1} + a_2^{b_2} + \ldots + a_n^{b_n} \geq a_1^{c_1} + a_2^{c_2} + \ldots + a_n^{c_n}.$$

Розв'язання. Якщо в теоремі 2.4 взяти $f(x) = e^x$, $x_i = \ln a_i, y_i = b_i$, то скориставшись тим, що $e^{\ln x} = x$ для всіх $x > 0$, отримаємо необхідне.

Зауваження. Якщо взяти $x_1 = y_1 = \ln a$, $x_2 = y_2 = b$, отримаємо, що $a^a + b^b \geq a^b + b^a$.

Необхідно зазначити, що за допомогою нерівності Карамати можна доводити не лише алгебраїчне нерівності, а й геометричні та тригонометричні.

Задача 3.5 [12]**.** Нехай α, β, γ – кути довільного трикутника. Тоді:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 3\sqrt{3}.$$

Розв'язання. З властивості 1.1 випливає, що [10]:

$$X = (\alpha, \beta, \gamma) \succ Y = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \tag{3.1}$$

тому й $X' = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) \succ Y' = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Для завершення доведення лишилося застосувати нерівність Карамати до цих наборів та опуклої вниз на проміжку $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ функції $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Зауважимо, що за допомогою співвідношення (3.1) можна довести значну кількість відомих нерівностей для кутів трикутників (наведені, зокрема, в [12]).

3.2. Мажоруючі трикутники

Як було показано в попередніх розділах, зазвичай за допомогою відношення мажоризації порівнюють послідовності (вектори) або матриці. У даному розділі вперше буде введено поняття мажоризації для сторін трикутників, що допоможе знайти деякі цікаві геометричні співвідношення.

Означення 3.1. Трикутник $A_1B_1C_1$ *мажорує* трикутник $A_2B_2C_2$ тоді, коли для сторін $a_1 \geq b_1 \geq c_1$ та $a_2 \geq b_2 \geq c_2$ даних трикутників справджується така система співвідношень:

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2; \\ a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2; \\ a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2. \end{cases}$$

Наслідок. Із останньої рівності випливає те, що відношення мажоризації визначається лише для трикутників з рівними периметрами. Тоді із властивості 1.1 випливає, що довільний трикутник буде мажорувати рівносторонній трикутник такого ж периметру, тобто:

$$A = (a,\ b,\ c) \succ T = \left(\frac{P}{3},\ \frac{P}{3},\ \frac{P}{3}\right), \qquad (3.1)$$

де $\frac{P}{3}$ – сторона рівностороннього трикутника, периметр якого дорівнює P.

Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ мажорує трикутник $A_2B_2C_2$. Порівняємо значення деяких параметрів таких трикутників.

Властивість 3.1. $S_1 \leq S_2$.

Застосуємо нерівність Карамати до наборів $A_1 = (a_1,\ b_1,\ c_1)$, $B_1 = (a_2,\ b_2,\ c_2)$ та опуклої вгору функції $f(x) = \ln(p - x)$:

$$(p - a_1)(p - b_1)(p - c_1) \leq (p - a_2)(p - b_2)(p - c_2).$$

Помножимо обидві частини на p:

$$16S_1^2 = p(p - a_1)(p - b_1)(p - c_1) \leq (p - a_2)(p - b_2)(p - c_2) = 16S_2^2.$$

Відповідно, $S_1 \leq S_2$.

Наслідок. $S \leq \frac{P^2\sqrt{3}}{36}$. Це твердження випливає безпосередньо з (3.1).

Властивість 3.2. $r_1 \leq r_2$.

Як було показано, $S_1 \leq S_2$. Оскільки $S_1 = pr_1$, $S_2 = pr_2$, то $r_1 \leq r_2$

Наслідок. $r \leq \frac{P\sqrt{3}}{18}$.

Для доведення досить згадати, що $r_T = \frac{P\sqrt{3}}{18}$, де r_T – радіус вписаного кола рівностороннього трикутника.

Властивість 3.3. $a_1 b_1 \cos\gamma_1 + a_1 c_1 \cos\beta_1 + b_1 c_1 \cos\alpha_1 \geq a_2 b_2 \cos\gamma_2 + {} + a_2 c_2 \cos\beta_2 + b_2 c_2 \cos\alpha_2$.

Застосуємо нерівність Карамати до введених у властивості 3.1 наборів A_1, B_1 та функції $f(x) = x^2$. Отримуємо:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \geq a_2^2 + b_2^2 + c_2^2. \tag{3.2}$$

З теореми косинусів маємо:

$$2a_1 b_1 \cos\gamma_1 = a_1^2 + b_1^2 - c_1^2,\ \ 2a_1 c_1 \cos\beta_1 = c_1^2 + a_1^2 - b_1^2,$$
$$2b_1 c_1 \cos\alpha_1 = c_1^2 + b_1^2 - a_1^2.$$

Аналогічні рівності можемо записати й для другого трикутника. Додамо ці рівності:

$$2a_1 b_1 \cos\gamma_1 + 2a_1 c_1 \cos\beta_1 + 2b_1 c_1 \cos\alpha_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2;$$
$$2a_2 b_2 \cos\gamma_2 + 2a_2 c_2 \cos\beta_2 + 2b_2 c_2 \cos\alpha_2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2.$$

Після використання властивості 1.1. отримаємо шукану нерівність.

Наслідок. $ab\cos\gamma + ac\cos\beta + bc\cos\beta \geq \frac{P^2}{6}$.

Для доведення зауважимо, що для рівностороннього трикутника:

$$a_T b_T \cos\gamma_T + a_T c_T \cos\beta_T + b_T c_T \cos\alpha_T = \frac{P^2}{6},$$

де a_T, b_T, c_T – сторони рівностороннього трикутника, α_T, β_T, γ_T – кути рівностороннього трикутника.

Властивість 3.4. $h_{a_1} + h_{b_1} + h_{c_1} \leq h_{a_2} + h_{b_2} + h_{c_2}$.

Очевидно, що $X_1 = \left(\frac{a_1}{S_1}, \frac{b_1}{S_1}, \frac{c_1}{S_1}\right) \mathrm{w}\!\succ X_2 = \left(\frac{a_2}{S_2}, \frac{b_2}{S_2}, \frac{c_2}{S_2}\right)$. З формули площі трикутника випливає: $\frac{a_1}{S_1} = \frac{2}{h_{a_1}}, \frac{b_1}{S_1} = \frac{2}{h_{b_1}}, \frac{c_1}{S_1} = \frac{2}{h_{c_1}}, \frac{a_2}{S_2} = \frac{2}{h_{a_2}}, \frac{b_2}{S_2} = \frac{2}{h_{b_2}}, \frac{c_2}{S_2} = \frac{2}{h_{c_2}}$. Тоді $H_1 = \left(\frac{1}{h_{a_1}}, \frac{1}{h_{b_1}}, \frac{1}{h_{c_1}}\right) \mathrm{w}\!\succ H_2 = \left(\frac{1}{h_{a_2}}, \frac{1}{h_{b_2}}, \frac{1}{h_{c_2}}\right)$. Застосуємо нерівність Карамати до цих наборів та функції $f(x) = -\frac{1}{x}$, яка є зростаючою та опуклою вгору на проміжку $x \in (0;\ \infty)$.

Наслідок. $h_a + h_b + h_c \leq \frac{P\sqrt{3}}{2}$.

Дійсно, для рівностороннього трикутника $h_T = \frac{P\sqrt{3}}{6}$, де h_T – висота цього трикутника.

Властивість 3.5. $\frac{1}{r_{a_1}} + \frac{1}{r_{b_1}} + \frac{1}{r_{c_1}} \geq \frac{1}{r_{a_2}} + \frac{1}{r_{b_2}} + \frac{1}{r_{c_2}}$.

Оскільки $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_{a_1}} + \frac{1}{r_{b_1}} + \frac{1}{r_{c_1}}$, $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_{a_2}} + \frac{1}{r_{b_2}} + \frac{1}{r_{c_2}}$, то $\frac{1}{r_{a_1}} + \frac{1}{r_{b_1}} + \frac{1}{r_{c_1}} \geq$ $\geq \frac{1}{r_{a_2}} + \frac{1}{r_{b_2}} + \frac{1}{r_{c_2}}$.

Наслідок. $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geq \frac{18}{P\sqrt{3}}$.

Знову скористаємося тим, що для рівностороннього трикутника $r_T = \frac{P\sqrt{3}}{18}$.

Висновки до розділу 3

У даному розділі наведено та розв'язано ряд задач, зокрема, авторських, на прикладі яких продемонстровано ефективність застосування нерівності Карамати. Також було введено нове поняття мажоруючих трикутників та проаналізовано співвідношення основних параметрів мажоруючих трикутників. Серед іншого, показано, яким чином з простого факту, що довільний трикутник буде мажорувати правильний трикутник такого ж периметру, одержуються оцінки на певні характеристики трикутника (площу, радіус вписаного кола, функції від сторін та кутів тощо).

ВИСНОВКИ

У даній роботі розглянуто поняття мажоризації та його властивості. Показано застосування даного відношення у моделях теорії прийняття рішень, біології та економіки. Тісно пов’язана із мажоризацією нерівність Карамати, властивостям та застосуванню якої присвячено дане дослідження. Ефективність методу доведення нерівностей за допомогою даного інструменту проілюстровано на прикладі багатьох відомих нерівностей, доведення яких за допомогою нерівності Карамати є набагато простішим. Яскравим прикладом таких нерівностей може виступати транснерівність, її уточнення, аналоги та узагальнення. Було розглянуто та доведено мажоритарну форму транснерівності та її функціональне узагальнення, для яких автором одержано альтернативні самостійні доведення.

У роботі розглянуто ряд задач, зокрема, авторських, розв’язок яких ілюструє ефективність нерівності Карамати та її придатність для аналізу певних характеристик мажоритарно пов’язаних послідовностей. Також було введено поняття мажоруючих трикутників – тобто таких трикутників рівного периметру, сторони яких утворюють мажоруючі набори. Проаналізовано співвідношення між основними параметрами таких трикутників: площі, радіусу вписаного кола, висот, значень окремих функцій від сторін та кутів. Проведений аналіз показує, як просто та систематично можна застосовувати нерівність Карамати для формулювання співвідношень між мажоритарно пов’язаними величинами. Зокрема, з простої властивості, що довільний трикутник буде мажорувати правильний трикутник такого ж периметру, одразу одержуються оцінки на певні характеристики довільного трикутника.

Серед напрямків подальших досліджень можна зазначити дослідження властивостей інших геометричних фігур, пов’язаних певними аналогами відношення мажоризації, а також безпосереднє застосування нерівності Карамати у моделях теорії ігор та теорії прийняття рішень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Barry C. A. Majorization: Here, There and Everywhere / C. A. Barry // Statistical Science Journal. – 2007. – vol. 22. – №3 – P. 407-413.
2. Day P. Rearrengement inequalities / P. Day // Carnegie Math Journal. – 1972. – vol. 25. – №5 – P. 930-943.
3. Joe H. Majorization, entropy and paired comparisons / H. Joe // The Annal of Statistics. – 1988. – vol. 16. – P. 915-925.
4. Karamata J. Sur une inégalitê relative aux fonctions convexes / J. Karamata // Publications of Mathematical University of Beograd. – 1932. – vol. 1. – P. 145-148.
5. London D. Rearrengement inequalities involving convex functions / D. London // Pacific journal of Mathematics. – 1970. – vol. 34 – №3 – P. 749-753.
6. Lorenz M.O. Method of measuring the concentration of wealth / M. O. Lorenz // Carnegie Math Journal. – 1972. – vol. 25 – №5 – P. 940-943.
7. Nicolić A. Jovan Karamata (1902-1967) / A. Nicolić // Novi Sad Math Journal. – 2002. – vol. 32. – №1 – P. 1-5.
8. Ruderman H. D. Two New Inequalities / H. D. Ruderman // The American Mathematical Monthly. – 1952. – vol. 59. – №1 – P. 29-32.
9. Tomić M., Théorème de Gauss relatif au centre de gravité et son aplication / M. Tomić // Bulletin of the Society for Mathematical Physi. – 1949. – vol. 1. – №1 – P. 31-40.
10. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и её приложения: монография / И. Олкин, А. Маршалл. –М: Мир, 1983. – 288 с.
11. Номировский Д. Неравенство Караматы / Д. Номировский // Квант. – 2000. – №4. – С. 43-45.
12. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. – М: МЦНМО, 2007. – 635 с.

13. Радзивиловский Л.В. Обобщение перестановочного неравенства и монгольское неравенство / Л. В. Радзивиловский // Сборник «Математическое просвещение». – 2006. – №10 – С 210-224.

14. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства /монография / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М: Государственное издательсвто иностранной литературы, 1948 – 456 с.

15. Храбров А.И. Вокруг Монгольского неравенства / А. И. Храбров // Сборник «Математическое просвещение». – 2000. – №4. – С. 43-45.