

Міністерство освіти і науки України  
Департамент освіти і науки виконавчого органу Київської міської ради  
(Київської міської державної адміністрації)  
Комунальний позашкільний навчальний заклад  
«Київська Мала академія наук учнівської молоді»

Відділення фізики та астрономії  
Секція: аерофізика та космічні дослідження

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГРАВІТАЦІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ СИСТЕМ

Роботу виконала:  
Григорян Каріна Вікторівна,  
учениця 10-Б класу школи І-ІІІ ступенів № 248  
Деснянського району міста Києва

Науковий керівник:  
Петренко Богдан Артемович,  
аспірант фізичного факультету  
Київського національного університету імені Тараса Шевченка,  
Педагогічний керівник  
Кузнецова Лариса Юхимівна,  
вчитель фізики школи І-ІІІ ступенів № 248

Комунальний позашкільний навчальний заклад  
«Київська Мала академія наук учнівської молоді»

Анотація



Григорян Каріна Вікторівна, учениця 10-Б класу, школи I-III ступенів № 248 Деснянського району міста Києва, вихованка Київської Малої академії наук.

Науковий керівник: Петренко Богдан Артемович, аспірант фізичного факультету Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка.

Педагогічний керівник: Кузнецова Лариса Юхимівна, учитель фізики школи I-III ступенів № 248 Деснянського району міста Києва.

Комп'ютерне моделювання гравітаційно зв'язаних систем

Дослідницьку роботу присвячено дослідженню впливу гравітаційної взаємодії на рух тіл у гравітаційно зв'язаних системах. Метою моєї роботи було розглянути теорії гравітації та вплив гравітаційної взаємодії на рух тіл; здійснити комп'ютерне моделювання гравітаційно зв'язаних систем за допомогою мов програмування Julia та Python.

Для досягнення мети мною були поставлені наступні завдання:

- ознайомитися з природою гравітації, основними теоріями та законами, що використовуються для опису гравітаційного поля;
- розглянути вплив гравітаційної взаємодії на рух тіл;
- за допомогою мов програмування Julia та Python написати коди програми для здійснення комп'ютерного моделювання гравітаційного впливу в зв'язаних системах;
- провести серії моделювання з різними початковими параметрами та з'ясувати закономірності еволюції гравітаційно зв'язаних систем у просторі-часі.

Актуальність проведеної роботи полягає в можливості використання комп'ютерного моделювання для дослідження стійкості і еволюції зоряних скупчень.

Теоретична частина роботи присвячена ознайомленню з природою гравітації, гравітаційно зв'язаними системами на прикладі зоряних скупчень та розгляду впливу гравітаційної взаємодії на рух тіл.

В практичній частині роботи реалізовано комп'ютерне моделювання гравітаційного впливу за допомогою мов програмування Julia та Python. За допомогою Python досліджено вплив початкових умов на рух об'єктів у скупченні та закономірності еволюції досліджуваної системи. З'ясовано, що стійкість скупчення визначається повною кінетичною енергією зір; встановлено граничне значення дисперсії швидкостей зір, при якому система перестає бути стійкою,  $\langle v \rangle = 0.6 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ .

Ключові слова: гравітаційна взаємодія, гравітаційно зв'язані системи, зоряні скупчення, комп'ютерне моделювання, мови програмування Julia та Python.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ I .....	6
ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА .....	6
1.1. Природа гравітації. ....	6
1.2. Гравітаційні зв'язані системи. Вплив гравітаційної взаємодії на рух тіл. ....	13
РОЗДІЛ II.....	18
ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.....	18
2.1. Ознайомлення з можливостями мови програмування Julia. ....	18
2.2. Ознайомлення з можливостями мови програмування Python.....	20
2.3. Комп'ютерне моделювання гравітаційного впливу в зв'язаних системах за допомогою мови програмування Python. Опис методу дослідження.....	21
2.4. Дослідження впливу початкових умов на рух об'єктів у гравітаційно зв'язаних системах. ....	23
ВИСНОВКИ.....	27
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	28
ДОДАТКИ .....	30

## ВСТУП

В усі часи, починаючи з давніх-давен і до наших днів, вид зоряного неба своєю красою і величчю привертав увагу людей. Астрономія, найдавніша і водночас вічно молода наука, у своєму розвитку відкривала перед людиною чарівний і прекрасний світ галактик і квазарів, зірок та туманностей, комет та астероїдів, планет, оточених супутниками та загадковими кільцями. Однією із найважливіших сил, завдяки якій існує Всесвіт, є сила тяжіння. Вона забезпечує силу, яка утримує нас на поверхні Землі, а Землю – на орбіті Сонця. Саме сила тяжіння, в першу чергу, була відповідальна і за формування Сонячної системи; саме гравітаційне притягання всієї речовини, з якої утворилося Сонце, зробило можливим ядерний синтез всередині зорі, що забезпечує нас сьогодні світлом і теплом. Гравітаційна взаємодія є найслабшою відомою взаємодією у природі, і тому вона не відіграє значної ролі у визначенні внутрішніх властивостей навколишньої матерії. З іншого боку, завдяки своїй універсальній дії, саме гравітація контролює траєкторії тіл у Сонячній системі та в інших місцях Всесвіту, керує структурами та еволюцією зірок, галактик і всього космосу.

Метою моєї роботи було розглянути теорії гравітації та вплив гравітаційної взаємодії на рух тіл; здійснити комп'ютерне моделювання гравітаційно зв'язаних систем за допомогою мов програмування Julia та Python.

Для досягнення мети мною були поставлені наступні завдання:

- ознайомитися з природою гравітації, основними теоріями та законами, що використовуються для опису гравітаційного поля;
- розглянути вплив гравітаційної взаємодії на рух тіл;
- за допомогою мов програмування Julia та Python написати коди програми для здійснення комп'ютерного моделювання гравітаційного впливу в зв'язаних системах;
- провести серії моделювання з різними початковими параметрами та з'ясувати закономірності еволюції гравітаційно зв'язаних систем у просторі-часі.

Об'єктом дослідження є зоряні скупчення.

Предметом дослідження є стійкість зоряних скупчень в залежності від початкових умов існування.

Інформаційною базою роботи були сучасні підручники з астрофізики, наукові статті за даною тематикою, відео лекції провідних фахівців, інформаційні статті про мови програмування Julia та Python.

Методи дослідження:

- теоретичний: ознайомлення з літературою та матеріалами мережі Internet;
- емпіричний: використання мов програмування Julia та Python з метою написання коду програми для здійснення комп'ютерного моделювання гравітаційного впливу в зв'язаних системах; дослідження впливу початкових умов на рух об'єктів у гравітаційно зв'язаних системах; проведення серій моделювань з різними початковими параметрами систем;
- аналітичний: з'ясування закономірності еволюції гравітаційно зв'язаних систем у просторі-часі, порівняння отриманих закономірностей з теоретичними.

Практичне значення проведеної роботи полягає в можливості розширення знань про сучасні методи дослідження в астрономії в цілому та методи дослідження стійкості і еволюції зоряних скупчень зокрема, отриманні навичок комп'ютерного моделювання руху астрономічних об'єктів під дією гравітації; в можливості підвищення мотивації учнів у вивченні фізики та астрономії та розвитку їх інтересів і творчих здібностей.

## РОЗДІЛ I

### ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

#### 1.1. Природа гравітації.

Гравітаційна взаємодія є однією з чотирьох фундаментальних взаємодій у природі – поряд з електромагнітною, сильною і слабкою, і виступає як надзвичайно впливове природне явище. Незважаючи на свою поширеність у Всесвіті, гравітація є однією з найзагадковіших сил. Назва «гравітація» походить від лат. *gravitas*, що означає «тяжіння», і згідно з великою астрономічною енциклопедією [6] означає універсальну фундаментальну взаємодію між усіма матеріальними тілами [1].

Гравітація має деякі дивовижні властивості. Вона є причиною концентрації матерії, зокрема існування небесних тіл, у тому числі галактик, зір і планет, наділяє тіла вагою, бере участь у обертанні орбіт небесних тіл. Без гравітації не могло б виникнути життя на Землі. Гравітаційне притягання не вдається ані блокувати, ані навіть послабити перешкодами або екранами. Жоден щит, виготовлений з будь-якого відомого матеріалу, не здатний перешкодити гравітаційному впливу. Натомість, до сили тяжіння Землі додається сила притягання з боку самого захисного екрану. Проте, оскільки сила тяжіння Землі набагато більша за силу притягання з боку екранів, їх притягання виявляється нікчемним. Все це свідчить про велику проникаючу здатність гравітації. Причому щільність гравітаційного впливу є надзвичайно високою – він діє як на мега-, так і на макро-, і мікрооб'єкти, включаючи елементарні частинки.

Значення гравітації полягає ще й у тому, що вона є таємничою силою, яка з'єднує, скріплює і не дає розпастися речовині як на рівні молекул (що сприймається, як сила міжатомної взаємодії), так і на міжмолекулярному рівні. Оскільки внутрішньоядерні сили – сили взаємодії нуклонів – діють дуже малих відстанях (порядку  $10^{-12} - 10^{-13}$  см), то вони можуть брати участь лише у міжатомних і міжмолекулярних взаємодіях. Але вони не можуть скріплювати атоми та молекули

та утворювати речовину. За це відповідають якісь інші сили. І цими таємничими силами можуть бути лише сили, які забезпечують гравітацію [2].

Єдиною силою, яка протидіє гравітації, є гравітація іншого тіла, яка своєю силою протидіє силі гравітації першого тіла. Але коли тіла увійдуть у дотик одне з одним (зіллються), їх гравітаційні сили об'єднуються. Гравітація – це властивість матерії.

Отже, вся матерія Всесвіту притягується до всієї іншої матерії. Чим більше матерії і чим ближче об'єкти один до одного, тим більшим є гравітаційне притягання. І на відміну від електромагнітної взаємодії, яка може виступати, як відштовхування або притягання, гравітація завжди виступає як притягання.

Питання з'ясування природи гравітації нерозривно пов'язане з науковим поясненням дивного руху планет. Спостереження за цим рухом показувало, що планети ніби безсистемно блукають по небу, випадковим чином змінюють своє положення відносно нерухомих зірок. Над пошуком справжніх закономірностей планетних рухів астрономи безуспішно билися протягом майже двох тисячоліть.

Віддаючи данину історії, слід віддати належне роботам данського астронома Тихо Браге, який протягом майже всього свідомого життя займався ретельними вимірюваннями видимих положень планет відносно зірок. Його багаторічні записи небесних координат планет послуговували тим фундаментом, на якому німецькому астроному Йоганну Кеплеру вдалося встановити форму кривих, що зображають орбіти планет Сонячної системи і знайти математичну схему, яка описувала рухи планет. Результати титанічної роботи Кеплера були опубліковані у книзі «Нова астрономія», виданій у Празі у 1609 р. , і на сьогодні відомі, як три закони руху планет навколо Сонця [3].

Перший закон Кеплера: планети рухаються еліптичними орбітами. Один із фокусів є спільним для всіх еліптичних орбіт, і в ньому знаходиться Сонце.

Другий закон Кеплера (закон площ): радіус-вектор планети за рівні проміжки часу описує рівновеликі площі.

Третій закон Кеплера:(встановлює зв'язок між розмірами орбіт різних планет та періодами їхнього обертання навколо Сонця): квадрати зоряних періодів

обертання планет навколо Сонця пропорційні кубам їх середніх відстаней від Сонця (великих півосей їх еліптичних орбіт) (рис. 1.1.).

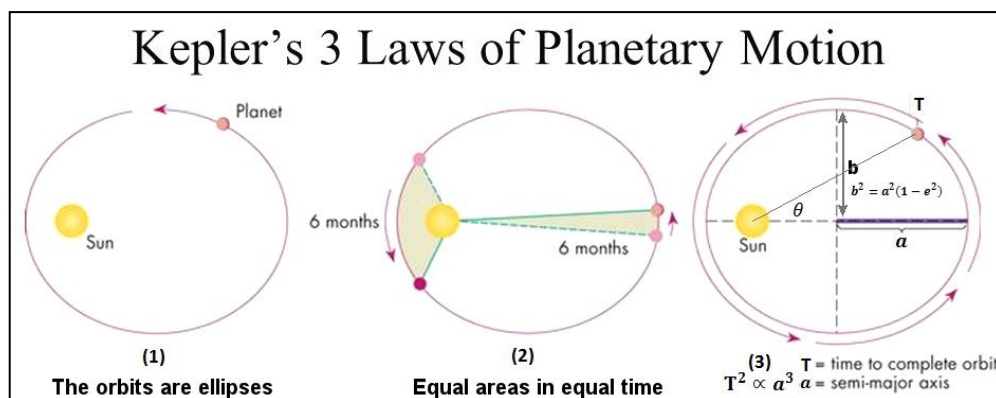


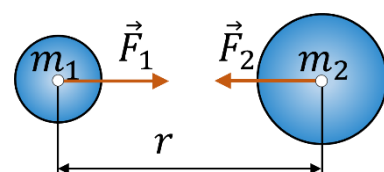
Рис. 1.1. Закони Кеплера [6]

Відкриті Кеплером закони руху планет були визначним науковим досягненням. Результати багаторічних спостережень та багатотисячних вимірів виявилися сконцентрованими в чіткій системі простих правил. Завершився період вивчення рухів планет, який можна визначити як геометричний чи кінематичний. Але постало нове питання про те, чому планети рухаються саме так. Якими причинами пояснюється описаний законами Кеплера рух планет навколо Сонця, рух супутників Юпітера навколо планети, рух Місяця навколо Землі?

Встановлена в астрономії простота руху планет вимагала справжнього наукового пояснення з урахуванням фундаментальних законів природи. Тому динамічне пояснення рухів планет можна розглядати як початок сучасної теоретичної фізики. Перший важливий момент був усвідомлений Галілеєм, який відкрив закон інерції. Але Галілей вважав рівномірний прямолінійний рух матеріальних тіл їх природним станом лише за земних умов. Природним рухом планет, на думку Галілея, був рівномірний коловий рух. [5]

Шукаючи причини планетних рухів, Ісаак Ньютон у своїй праці «Математичні початки натуральної філософії» встановив кількісну форму закону всесвітнього тяжіння:

Між будь-якими двома тілами діють сили гравітаційного притягання, які прямо пропорційні добутку мас цих тіл і обернено пропорційні квадрату відстані між ними:





$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ , – гравітаційна стала

З'ясувалося, що закон всесвітнього тяжіння є настільки універсальним, що за його допомогою можна пояснити рух планет навколо Сонця (відповідно до законів Кеплера) як рух під дією центральної сили всесвітнього тяжіння.

Ньютон також встановив, в що в центральному полі тяжіння тіла можуть рухатися як по еліпсах (в окремому випадку по колах), так і по іншим конічним перерізам: параболам та гіперболам. Зокрема, такими відкритими орбітами рухаються комети, що прилітають в околиці Сонця з-за меж Сонячної системи. Форма траєкторії руху тіл визначається початковими параметрами (швидкістю руху) (рис. 1.2.).

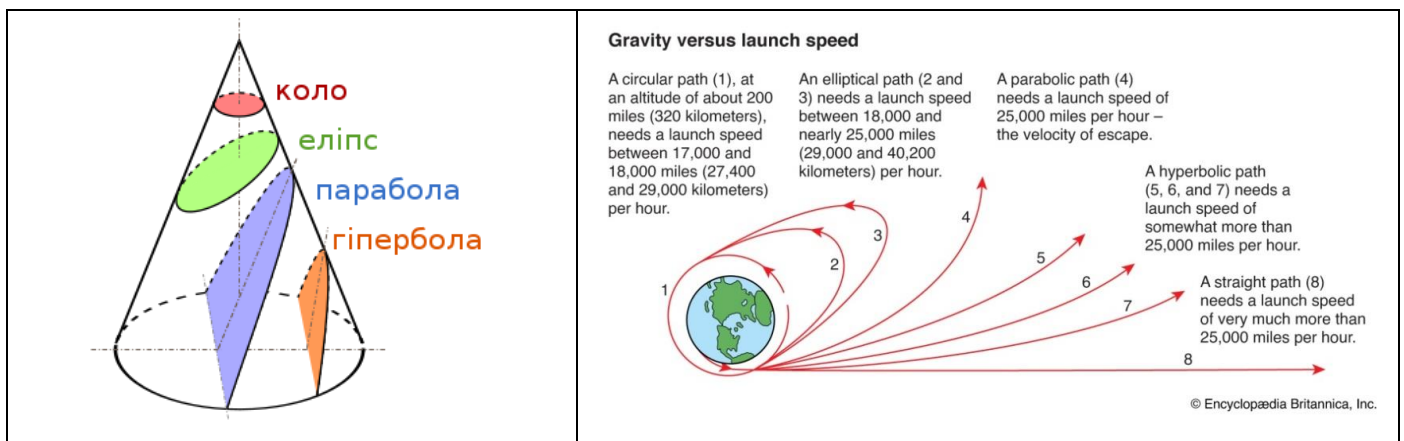


Рис. 1.2. Траєкторії руху тіл під дією сили тяжіння [6]

Ньютон продемонстрував, що теорія тяжіння успішно пояснила як закони Кеплера, так і набагато складніші явища, аж до взаємних збурень планетних орбіт, нерівномірностей у русі Місяця, і навіть явище океанських припливів (рис. 1.3.). Ньютон показав, що сили тяжіння, що діють між небесними тілами, пояснюють також добре знайоме всім падіння тіл на землю, тобто пов'язав всесвітнє тяжіння із явищем земного притягання. Вивчаючи рух Місяця, він довів, що причиною, що управляє рухом Місяця, є притягання Місяця до Землі, тобто сила тяжіння Землі, яка простягається і до Місяця, зменшуючись обернено пропорційно квадрату відстані від центру Землі. Отже, саме з ім'ям Ньютона пов'язана цілісна механістична картина світобудови.

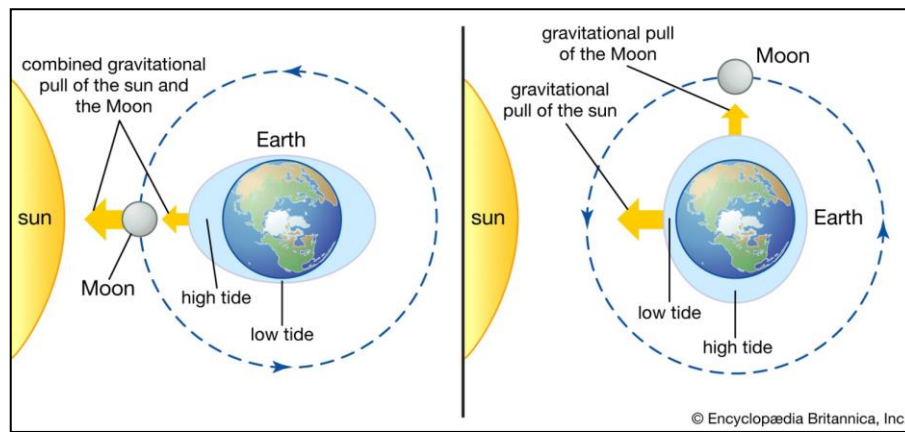


Рис. 1.3. Генерування припливів на Землі гравітаційним притяганням з боку Сонця та Місяця [6]

Незважаючи на поширеність гравітації у Всесвіті, неможна дати однозначної відповіді на питання про природу гравітації. Існує більше десятка теорій про природу гравітації. Найбільш поширені пов'язані з іменами І. Ньютона і А. Ейнштейна [7].

За теорією Ньютона, кожен об'єкт створює особливий вид матерії, за допомогою якого здійснюється гравітаційна взаємодія – гравітаційне поле. Сила притягання діє між будь-якими тілами у Всесвіті на будь-яких відстанях. Теорія Ньютона достатньо для вирішення практичних завдань у масштабах Землі та для розрахунку руху небесних тіл. Але слід зазначити, що незважаючи на те, що теорія Ньютона цілком застосовна на практиці, вона має низку недоліків. Закон всесвітнього тяжіння є математичним описом, але не дає уявлення про фундаментальну фізичну природу речей. Згідно з Ньютоном, сила тяжіння миттєво діє на будь-яких відстанях. З огляду на те, що найбільша швидкість передачі взаємодій у світі – швидкість світла, отримуємо невідповідність.

На даний момент домінуючою теорією, що описує гравітацію, є загальна теорія відносності (ЗТВ), запропонована Альбертом Ейнштейном у 1915-1916 роках. ЗТВ описує гравітацію як прояв геометрії простору-часу. У рамках ЗТВ гравітація розглядається не як сила, що діє на тіла, але як викривлення масивним тілом 4-мірного простору-часу. Таким чином, гравітація – не силова взаємодія. Чим масивніший об'єкт, тим сильніше він викривляє простір. Яка дія гравітації? В літературі описують наступну аналогію. Уявімо простір у вигляді пружного листа.

Якщо покласти на нього легкий тенісний м'ячик, то поверхня залишиться рівною. Але якщо поруч із м'ячиком покласти важку гирю, вона утворить на поверхні пружного листа заглиблення, і м'ячик почне скочуватися до великої та важкої гирі (рис. 1.4.). Це і є гравітація.



Рис. 1.4. Викривлення простору навколо масивних тіл як причина гравітаційного притягання [8]

Отже, за Ейнштейном, масивне тіло створює навколо себе збурення, в результаті якого оточуючі тіла починають рухатися геодезичними лініями (прикладом таких ліній є лінії земної широти і довготи, які для внутрішнього спостерігача здаються прямими лініями, але насправді трохи викривлені). Так само відхиляються і промені світла, що спотворює видиму картину за масивним об'єктом. При успішному співпаданні положень і мас об'єктів це призводить до ефекту гравітаційного лінзування (коли викривлення простору-часу виступає у ролі величезної лінзи, що робить джерело далекого світла набагато яскравішим). Експериментальні докази ЗВТ наведені на рис. 1.5.-1.6.

У 1919 році спостереження сонячного затемнення підтвердило прогноз Ейнштейна про те, що світло відхиляється від прямолінійного поширення поблизу масивних тіл. Ця експериментальна підтримка його загальної теорії відносності принесла Ейнштейну миттєве визнання у всьому світі.

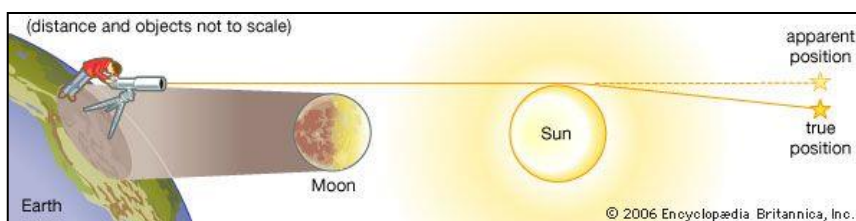


Рис. 1.5. Викривлення світлових променів біля масивних тіл [6]

На рис. 1.6. зображено галактичне скупчення, розташоване приблизно в п'яти мільярдах світлових років від нас. Це скупчення створює величезне гравітаційне поле, яке «згинає» світло навколо себе. Гравітаційна лінза створює кілька копій блакитної галактики, що розташована на приблизно вдвічі більшій відстані. По колу, що оточує лінзу, видно чотири зображення галактики; п'яте видно біля центру знімка, зробленого космічним телескопом Хаббл.

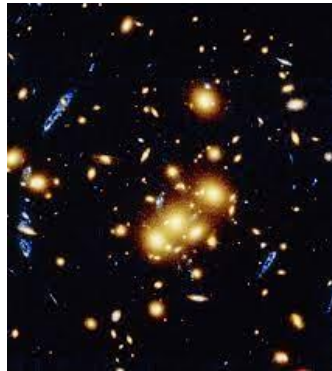


Рис. 1.6. Гравітаційне лінзування [6]

На основі ЗТВ Ейнштейн передбачив існування гравітаційних хвиль. Гравітаційні хвилі – зміни гравітаційного поля, що поширюються подібно до хвиль. Вперше вони були безпосередньо виявлені у вересні 2015 року двома детекторами-близнюками обсерваторії LIGO, на яких були зареєстровані гравітаційні хвилі, що виникли, ймовірно, в результаті злиття двох чорних дірок і утворення однієї більш масивної чорної діри, що обертається.

Незважаючи на те, що теорія відносності чудово описує процеси в макросвіті, у мікросвіті все ж таки переважає квантова теорія. Сам Ейнштейн останніми роками життя намагався об'єднати ці дві теорії в одну об'єднану теорію, яка вже отримала назву «теорії всього». Однак цього разу він зазнав невдачі так само, як і багато вчених, які намагалися це зробити після нього. Приблизно до початку 2000-х років здавалося, що з появою теорії струн рішення вже майже знайдено, однак примирити в ній всі види взаємодій і елементарних частинок так і не вдалося: якщо при одному числі вимірювань у цій теорії добре описуються одні частинки, інші з них не вписуються, при іншому ж їх числі теорією чудово описуються протилежні частинки, але не вписуються перші. Таким чином, пошуки об'єднаної теорії і гіпотетичної безмасової частинки гравітону все ще продовжуються.

## 1.2. Гравітаційні зв'язані системи. Вплив гравітаційної взаємодії на рух тіл.

Розподіл речовини в Галактиці не є рівномірним. Окрім зір, в ній зустрічаються зоряні скупчення й асоціації, а також туманності. Пов'язані взаємним тяжінням групи зір спільного походження називають зоряними скупченнями. Їх поділяють на два види – розсіяні й кулясті.

Кулясті зоряні скупчення – це щільні системи, що складаються з сотень тисяч чи кількох мільйонів зір. Ці скупчення через велику взаємну силу тяжіння мають правильну, майже сферичну, форму, що істотно не змінюється мільярди років. Просторовий розподіл зір у скупченні різко зростає від його периферії до центра, іноді досягаючи тисячі на 1 кубічний св. р. Середня відстань між зорями становить приблизно 0,15 пк, а в центральних частинах – до 0,05 пк. Типові поперечники кулястих скупчень складають 21–61 пк [4]. Типовим представником таких скупчень є скупчення Мессьє 3 (рис. 1.7).

Розподіл цих об'єктів у Галактиці має сферичну форму: кулясті зорні скупчення концентруються навколо ядра Галактики, перебуваючи на доволі великих відстанях від її диска. Кулясті зоряні скупчення обертаються навколо галактичного центра з періодами в сотні мільйонів років. Їхні орбіти – дуже витягнуті еліпси, по-різному нахилені до площини нашої зоряної системи.



Рис. 1.7. Кулясте зоряне скупчення Мессьє 3 [12]

Унаслідок дуже великих відстаней від Землі їх майже неможливо спостерігати неозброєним оком. Лише три з них (у сузір'ях Геркулеса, Змії і Стрільця) в темні безмісячні ночі можна побачити без допомоги телескопа, як украй слабкі туманні плями. Зорі кулястих скупчень найстаріші в Галактиці. Їх вік становить 5–6, а інколи й більше 12 млрд. років. За такий час масивні зорі, що виникали на початку

формування скупчення, відживають свій вік, тому в кулястих зоряних скупченнях нині присутні лише маломасивні зорі, більшість з яких перебуває на пізніх стадіях еволюції. Головні їх особливості: низький вміст важких елементів: майже в 100 разів менший в порівнянні із Сонцем та відсутність блакитних зір. У кулястих скупченнях є багато пульсуючих змінних зір, що належать до різних типів. Найчисленнішими (до 90 %) є змінні типу RR Ліри: короткоперіодичні цефеїди, гіганти спектральних класів А – F, період пульсації яких становить 0,2–1,2 доби. Вони мають температури поверхонь 6400–7600 К, маси 0,6 маси Сонця і перебувають на прикінцевих стадіях своєї еволюції [4], [7]. У кожному окремому кулястому скупченні хімічний склад зір схожий, але від скупчення до скупчення він може бути дуже різним. Загалом ті скупчення, що лежать ближче до центра Галактики, багатші на метали, ніж периферійні скупчення.

Розсіяні зоряні скупчення об'єднують від кількох десятків до кількох тисяч зір і містяться в диску Галактики поблизу її площини. Розсіяні зоряні скупчення – група зір, типовий вік яких  $\sim 1$  млрд. років. Вони утворилися з однієї гігантської молекулярної хмари. Наразі, у нашій Галактиці відкрито понад 1100 розсіяних скупчень, але вочевидь їх набагато більше. Мають неправильну форму; діаметр складає 10 – 20 св. р.; до їх складу входять молоді яскраві зорі з незначним вмістом важких хімічних елементів; розташовані поблизу галактичної площини.

Утворюватися розсіяні зоряні скупчення розпочинають зі стискання частини гігантської молекулярної хмари і пилу, маса яких у десятки тисяч разів більша, ніж маса Сонця. Концентрація водню у таких хмарах від  $10^2$  до  $10^6$  см<sup>3</sup>. Зореутворення починається там, де концентрація водню та пилу перевищує  $10^4$  молекул/ см<sup>3</sup>, але, як правило, тільки (1–10) % об'єму хмари має таку концентрацію.

Розсіяні зоряні скупчення не мають чітких зовнішніх меж. За спостережень ці скупчення проявляють себе як ділянки, на яких міститься більше зір, ніж у середньому на небі. Якщо, наприклад, в тій частині Молочного Шляху, де нині міститься Сонце, середня відстань між зорями становить 2–3 пк, то в розсіяних скупченнях така відстань становить 0,6 пк. У структурі розсіяних зоряних скупчень

виділяють ядро, діаметр якого не перевищує 20–30 пк (середнє значення лежить в межах 5–6 пк) і корону, діаметр якої в 2–10 разів більший, ніж діаметр ядра. [4], [7]

Зорі розсіяних скупчень зазвичай молоді віком – приблизно десятки чи сотні мільйонів років. Проте трапляються скупчення, зорі в яких мають вік у кілька мільярдів років (5–6 млрд. років), наприклад, М 67.

Отже, розсіяні скупчення можуть різнитися значно відмінним зоряним складом. Молоді розсіяні скупчення, окрім інших зір, містять багато блакитних гігантів, але в них практично відсутні червоні гіганти. У скупченнях віком у мільярди років навпаки містяться червоні надгіганти, гіганти, цефеїди, спалахуючі зорі, що властиво пізнім етапам еволюції зір, але немає блакитних гігантів.

Розсіяні скупчення не завжди досягають «глибокої старості». Через слабкий гравітаційний зв'язок між членами скупчення й під впливом гравітаційного поля Галактики за проміжок часу від кількох сотень мільйонів до кількох мільярдів років вони розпадаються. Найстаріші розсіяні зоряні скупчення водночас і найщільніші, вочевидь, в них діють великі гравітаційні сили.

Зорі в кожному окремому розсіяному скупченні мають приблизно однаковий хімічний склад, що свідчить про їх спільне походження. Взагалі, вміст важких хімічних елементів у зорях розсіяних скупчень різного віку розрізняється, але в середньому близький до сонячного. Масивні зорі в скупченнях великого віку встигають подолати значну частину свого еволюційного шляху і значно змінити хімічний склад, порівнюючи з початковим. Спостереження також вказують на можливу залежність хімічного складу розсіяних скупчень від відстані до центра Галактики: що ближче скупчення до центра, то більше в ньому важких елементів.

Вивчення зоряних скупчень важливе для розуміння процесів еволюції зір, хоча вивчати їх не просто. Через низьку зоряну щільність зорі скупчень легко сплутати з випадковими зорями, що лежать у тому самому напрямку. Виділити реальні групи зір можна, дослідивши їх рух у просторі й відстані від Сонця. Якщо зорі, що містяться приблизно на однаковій відстані від нас, рухаються в одному напрямку, мабуть, вони справді пов'язані в одну систему. Нині виявлено понад 1200



розсіяних скупчень. Найвідоміші серед них – Плеяди (M45) (рис. 1.8) і Гіади в сузір'ї Тельця.



Рис. 1. 8. Розсіяне зоряне скупчення Плеяди (Стожари) (M45) [13]

Окрім розсіяних зоряних скупчень, в Галактиці відкрито ще один схожий тип утворень, де зорі мають спільне походження – зоряні асоціації. Молоді розсіяні скупчення можуть знаходитися всередині молекулярної хмари, з якої вони утворилися, і «підсвічувати» її. З часом тиск випромінювання молодих зір розвіює газову хмару. Зорі в таких скупченнях пов'язані одна з одною відносно слабкими гравітаційними силами і легко можуть покинути скупчення. Молоді зорі, що відірвалися від рідного скупчення, стають частиною «зоряного братства» Чумацького Шляху. [9]

Зоряні асоціації не такі щільні, як скупчення, і більші розмірами: їх середня протяжність становить 60–100 пк. Зважаючи на зоряне населення, асоціації поділяють на OB- і T-асоціації. Типове населення OB-асоціацій – гарячі блакитні гіганти спектральних класів O та B. Це – дуже масивні зорі (10–50 мас Сонця), які швидко еволюціонують. В OB-асоціаціях є багато газопилової матерії, але під дією тиску випромінювання O-зір вона швидко вимітається за їх межі. Зорі в таких асоціаціях перебувають досить далеко одна від одної і гравітаційно між собою пов'язані слабо, що може призвести до зменшення густини речовини в асоціації і подальшого розсівання речовини під впливом гравітаційного поля Галактики [4].

T-асоціації містять велику кількість зір типу T Тельця. Це – молоді нестаціонарні зорі, що перебувають у процесі стискання і світять за рахунок перетворення гравітаційної енергії в теплову. Зорі типу T Тельця ще не вийшли на головну послідовність діаграми Герцшпрунга–Рассела, для них властива велика втрата маси через активне витікання речовини з поверхні. Вони мають маси до



трьох мас Сонця і належать до спектральних класів G, K та M. Оскільки T-асоціації – досить щільні групи (їхні поперечники не перевищують кількох десятків світлових років) зір з майже однаковими швидкостями, вони можуть бути доволі стійкими. В зоряних асоціаціях відбуваються схожі еволюційні процеси.

Підсумовуючи вищевикладене, зазначимо: питання природи гравітаційної взаємодії та її впливу на рух об'єктів є на сьогодні одним із найважливіших питань теоретичної і практичної фізики. Завдяки загальній теорії відносності стало можливим змінити акценти у розгляді питань, пов'язаних з природою гравітації. При цьому відкрилася найширша область для дослідження Всесвіту, де сили тяжіння грають вирішальну роль. Але слід зазначити, що остаточна теорія гравітації не сформульована. І сучасні дослідження Всесвіту, що здійснюються завдяки розвитку спостережувальної техніки та комп'ютерній модуляції дозволяють отримувати нові знання та наближатися до пізнання таємниць Всесвіту.

У практичній частині роботи буде проведене дослідження руху об'єктів у гравітаційно зв'язаних систем при різних початкових умовах у системах.

## РОЗДІЛ II

### ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

#### 2.1. Ознайомлення з можливостями мови програмування Julia.

Julia – високорівнева продуктивна вільна мова програмування з динамічною типізацією, створена для математичних обчислень. Також вона ефективна для написання програм загального призначення. Julia написана на Cі, C++ та Scheme.

До програми входить JIT-компілятор на основі LLVM, тому, програми, що написані повністю цією мовою, практично не поступаються у продуктивності додаткам, написаним статично компілованих мовах на прикладі Cі або C++. Більшість стандартної бібліотеки мови написана ним же. Також Julia має вбудовану підтримку команд для розподілених обчислень.

За допомогою JIT-компіляції досягається висока швидкість роботи додатків, підтримується навантаження функцій та операторів, що значно прискорює обчислення, а також можна створювати нові типи даних, які поведуться подібно до вбудованих типів. У процесі виконання автоматично обирається найкращий варіант функції.

Мова може розвиватися у напрямку підтримки розподілених обчислень. В цій програмі є велика кількість стандартних конструкцій для розпаралелювання коду.

Головним завданням при створенні була розробка універсальної мови, здатної працювати з великим обсягом обчислень і гарантувати максимальну продуктивність. В мові була реалізована підтримка хмар і паралельного програмування як заміна механізму MPI для великого обсягу обчислень.

Є модель побудови великих паралельних додатків, заснована на глобальному розподіленому адресному просторі. Така модель передбачає можливість проводити операції з посиланням на об'єкт, розташований на іншій машині, що також бере участь у обчисленнях. Цей механізм дозволяє відстежувати, які обчислення на яких системах виконуються, а також підключати до обчислень, що виробляються, нові машини. Основні можливості мови:

- мультиметод: можливість визначати поведінку функції в залежності від типу аргументів, що передаються;
- динамічна типізація;
- гарна продуктивність порівнянна зі статично типізованими мовами як С;
- система керування пакетами вбудована в програму;
- макроси та інші можливості метапрограмування;
- виклик Python функцій за допомогою PyCall;
- виклик C функцій безпосередньо: без додаткових надбудов та API;
- великі можливості для управління іншими процесами;
- паралельні та розподільні обчислення;
- супрограми: легковагі зелені потоки (green threads);
- можливість визначати додаткові типи не поступаються в швидкості та зручності вбудованим;
- розширені перетворення для числових та інших типів;
- підтримка Юнікоду, що включає, але не обмежується тільки UTF-8.

В практичній частині роботи за допомогою програми Julia було здійснено комп'ютерне моделювання гравітаційної взаємодії у системі з трьох тіл (тіла коливаються біля положення рівноваги) (рис. 2.1) та комп'ютерне моделювання гравітаційної взаємодії у системі з двох тіл (одне з тіл рухається навколо іншого по еліптичній орбіті) (рис. 2.2).

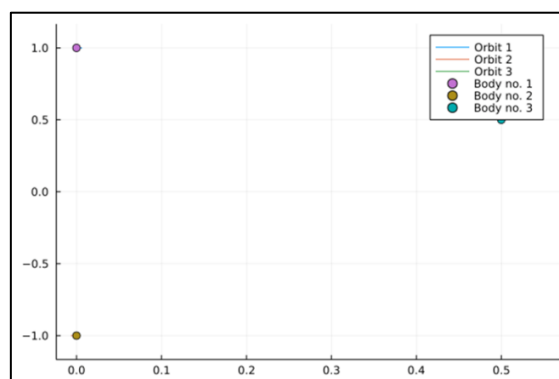


Рис. 2.1. Комп'ютерне моделювання гравітаційної взаємодії систем з трьох тіл.

(Створено автором за результатами власних досліджень)

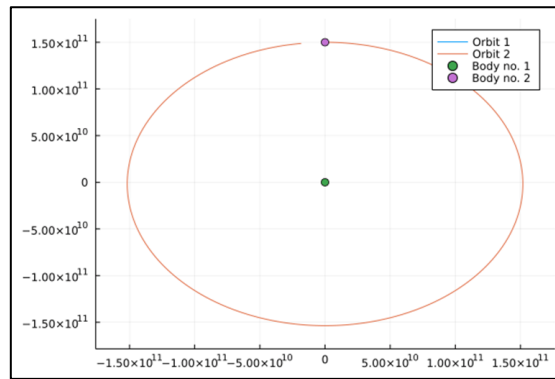


Рис. 2.2. Комп'ютерне моделювання гравітаційної взаємодії систем з двох тіл.  
(Створено автором за результатами власних досліджень)

## 2.2. Ознайомлення з можливостями мови програмування Python.

Python – інтерпретована об'єктно-орієнтована мова програмування високого рівня зі строгою динамічною типізацією. Вона є привабливою для швидкої розробки програм, а також як засіб поєднання наявних компонентів через структури даних високого рівня разом із динамічною семантикою та динамічним зв'язуванням. Ця мова підтримує модулі та пакети модулів, що сприяє модульності та повторному використанню коду. Стандартні бібліотеки та інтерпретатор доступні як у скомпільованій, так і у вихідній формі на всіх основних платформах. Підтримується кілька парадигм програмування, зокрема: об'єктно-орієнтована, процедурна, функціональна та аспектно-орієнтована.

Надзвичайно швидкий цикл редагування-тестування-налагодження внаслідок відсутності етапу компіляції забезпечує підвищену продуктивність цієї мови програмування. Налагоджування програми Python є легким: помилка або неправильне введення ніколи не призводить до помилки сегментації. Натомість, коли інтерпретатор виявляє помилку, він створює виняток. Якщо програма не знаходить виняток, інтерпретатор друкує трасування стека. Налагоджувач рівня вихідного коду дозволяє перевіряти локальні та глобальні змінні, оцінювати довільні вирази, встановлювати точки зупину, переходити через код по рядку і тому подібне.

Але обчислення у програмі зазвичай повільніші через стиль виконання рядок за рядком. Однак переваги мови роблять її зручною для кодування.

Ось кілька великих переваг Python:

- популярність і доступ: Python має величезну спільноту, яка підтримує його, що допомагає зберігати його доступність для будь-якого рівня кваліфікації. Це також безкоштовне програмне забезпечення з відкритим кодом;
- простий синтаксис: мова кодування Python має простий для вивчення синтаксис і використовує англійську мову;
- читабельність: рядки коду, написані на Python, легко читаються тому, що програма використовує гарний, чистий розрив у вигляді нового рядка коду для завершення команди;
- Python – це мова програмування загального призначення, а це означає, що, на відміну від HTML, CSS та JavaScript, вона може використовуватися для інших типів програмування та розробки програмного забезпечення, крім веб-розробки.

Python можна використовувати для таких речей, як:

- back-end (або серверна) розробка веб-додатків та мобільних додатків;
- розробка настільних додатків та програмного забезпечення;
- обробка великих даних та виконання математичних обчислень;
- написання системних скриптів (створення інструкцій, які говорять на комп'ютерній системі щось «робити»).

2.3. Комп'ютерне моделювання гравітаційного впливу в зв'язаних системах за допомогою мови програмування Python. Опис методу дослідження.

Опишемо фізичну основу для коду, який реалізує гравітаційне моделювання. Розрахунок сил, що діє на кожен частинку розраховується наступним чином [10], [11]:

Розрахунок сили.

Припустимо, що ми маємо систему з  $N$  матеріальних точок, індексованих від  $i = 1, 2, \dots, N$ . Кожна частинка має:

- масу  $m_i$ ,
- координати  $r_i = [x_i, y, z_i]$ ,

- швидкість  $v_i = [v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}]$ .

За законом всесвітнього тяжіння (відомим як «закон обернених квадратів») кожна частинка відчуває гравітаційне притягання з боку усіх інших частинок.

Тобто прискорення, якого набуває частинка, може бути обчислене за формулою:

$$a_i = G \cdot \sum_{j \neq i} m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3},$$

де  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$  – гравітаційна стала.

Положення та швидкості зірок розраховуються скоковим методом, фактично це є інтегрування по часу. Спочатку обчислюється прискорення, а потім – швидкість та положення.

Інтегрування по часу.

Положення та швидкості оновлюються за допомогою схеми скачка («kick-drift-kick»). Для кожного моменту часу з кроком  $\Delta t$  швидкість кожної частинки змінюється кожні півкроку за законом:

$$v_i = v_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot a_i$$

а положення змінюється з повнокроковим «дрифтом»:

$$r_i = r_i + \Delta t \cdot v_i$$

Для системи, що перебуває в рівновазі, зберігається повна механічна енергія, що слугує основою для перевірки роботи чисельного методу.

Енергетична діагностика

Повна енергія системи описується формулою:

$$E_{Tot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|}$$

і зберігається при еволюції в часі. Перша сума в цьому рівнянні – це кінетична енергія ( $E_k$ ), а друга – потенціальна енергія ( $E_p$ ). Код обчислює ці величини і відстежує загальну енергію, щоб переконатися, що вона приблизно зберігається чисельним методом. Як правило, це хороша практика для перевірки коду.

2.4. Дослідження впливу початкових умов на рух об'єктів у гравітаційно зв'язаних системах.

В практичній частині роботи був складений код скрипту програми [додаток А] і проведено декілька симуляцій. Загальні параметри симуляції:

```
# Simulationparameters
N      = 2  # Numberofparticles
t      = 0  # currenttimeofthesimulation
tEnd   = 20000000.0 * year # timeatwhichsimulationends
dt     = 100000 * year # timestep
softening = 0.1 # softeninglength
G      = 4.3E-3 # Newton'sGravitationalConstantinunitspc * solarmass^-1 * (km/s)^2
plotRealTime = True# switchonforplottingasthesimulationgoesalong

# GenerateInitialConditions
np.random.seed(17) # settherandomnumbergeneratorseed

star_mass = 10
mass = star_mass*np.ones((N,1)) # totalmassofparticles
pos = 2*np.random.randn(N,3) # randomlyselectedpositions
vel = 0.1*np.random.randn(N,3) # randomlyselectedvelocities
print("Initialvelocities: ", vel)
```

Часові параметри для усіх симуляцій обрані такими:

- тривалість фізичної симуляції  $T = 20$  млн років,
- крок по часу  $\Delta t = 0.1$  млн років.

А. Запуск нульовий (тестовий):  $N=2$ ,  $\langle d \rangle = 1$  пк,  $\langle v \rangle = 0$  км/с.

Зміни у коді відсутні.

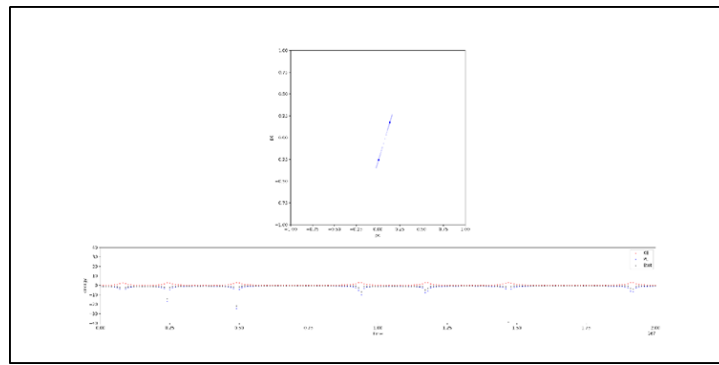


Рис. 2.3. Результати симуляції нульового (тестового) запуску.

(Створено автором за результатами власних досліджень)

В. Запуск перший:  $N = 100$ ,  $\langle d \rangle = 2$  пк,  $\langle v \rangle = 0$  км/с.

Зміни у коді присутні:

```
N      = 100 # Numberofparticles
vel = 0.1*np.random.randn(N,3) # randomlyselectedvelocities
plt.savefig('nbody_run_1.png',dpi=240)
```

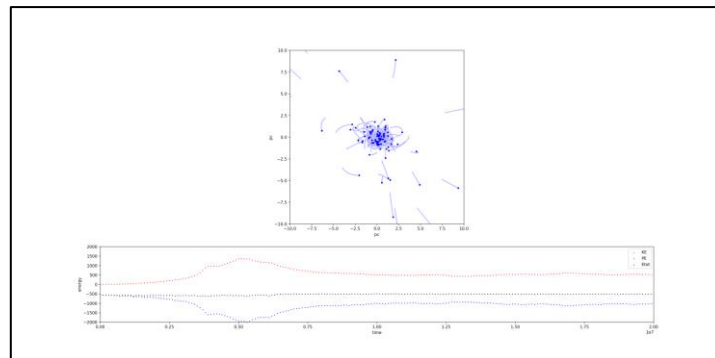


Рис. 2.4. Результати симуляції першого запуску.

(Створено автором за результатами власних досліджень)

Висновок до запуску В: симуляція стійкості зоряного скупчення, що складається із  $N=100$  об'єктів, проведена за умови  $\langle v \rangle = 0$  км/с, показує, що скупчення залишається стійким. В системі переважає гравітаційне притягання об'єктів.

С. Запуск другий:  $N = 100$ ,  $\langle d \rangle = 2$  пк,  $\langle v \rangle = 0.1 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ .

Зміни у коді присутні:

```
N      = 100 # Numberofparticles
vel = 0.1*np.random.randn(N,3) # randomlyselectedvelocities
plt.savefig('nbody_run_2.png',dpi=240)
```



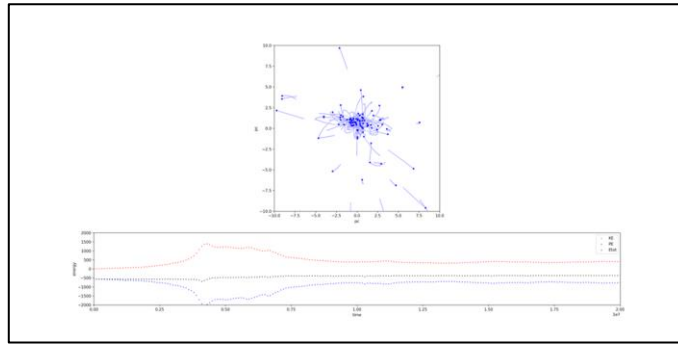


Рис. 2.5. Результати симуляції другого запуску.

(Створено автором за результатами власних досліджень)

Висновок до запуску С: симуляція стійкості зоряного скупчення, що складається із  $N=100$  об'єктів, проведена за умови  $\langle v \rangle = 0,1$  км/с, показує, що зі збільшенням швидкості окремих зір у скупченні внаслідок зростання кінетичної енергії стійкість системи порушується: окремі об'єкти починають долати гравітаційне притягання і покидати скупчення.

D. Запуск третій:  $N = 100$ ,  $\langle d \rangle = 2$  пк,  $\langle v \rangle = 1$  км/с.

Зміни у коді присутні:

```
N      = 100 # Numberofparticles
vel = 0.1*np.random.randn(N,3) # randomlyselectedvelocities
plt.savefig('nbody_run_3.png',dpi=240)
```

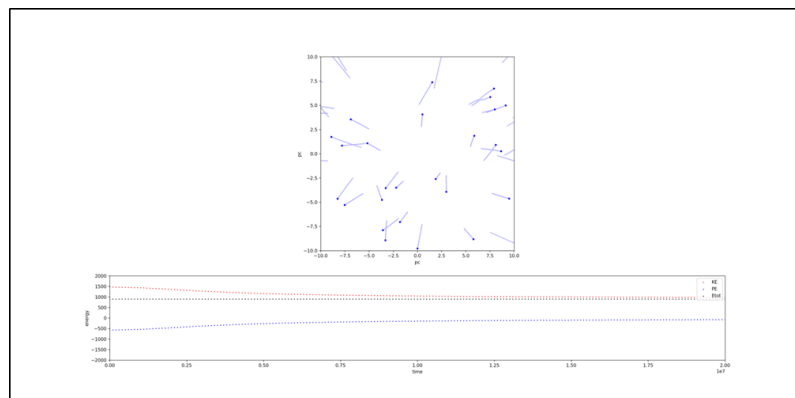


Рис. 2.6. Результати симуляції третього запуску.

(Створено автором за результатами власних досліджень)

Висновок до запуску D: симуляція стійкості зоряного скупчення, що складається із  $N=100$  об'єктів, проведена за умови  $\langle v \rangle = 1$  км/с, показує, що внаслідок зростання кінетичної енергії швидкості окремих зір у скупченні стійкість системи

порушилася остаточно: окремі об'єкти подолали гравітаційне притягання і покинули скупчення.

Граничне значення дисперсії швидкостей зір, при якому система вже не є стійкою, складає  $\langle v \rangle = 0.6 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ .

Підсумовуючи матеріал, викладений у практичній частині роботи, зазначимо:

1) існуючі на сьогодні спеціалізовані мови програмування дозволяють досліджувати шляхом моделювання поведінку об'єктів у зв'язаних зоряних систем із різними початковими параметрами;

2) аналіз процесів еволюції у зоряному скупченні показує порушення стійкості системи при граничному значенні дисперсії швидкостей зір  $\langle v \rangle = 0.6 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ .

## ВИСНОВКИ

Проведене в роботі дослідження дає змогу зробити наступні висновки теоретичного і науково-практичного характеру:

- 1) основні положення теорій гравітації Ньютона та Ейнштейна дозволяють зрозуміти еволюційні процеси, що відбуваються у Всесвіті;
- 2) прикладами гравітаційно зв'язаних систем у нашій Галактиці та інших галактиках є зоряні скупчення двох типів (розсіяні та кулясті) та зоряні асоціації;
- 3) сучасні можливості комп'ютерного моделювання дозволяють передбачити характер руху та протікання процесів еволюції різних астрономічних об'єктів, в тому числі і зоряних скупчень;
- 4) перебіг еволюції зоряних скупчень та асоціацій залежить від початкових умов в системі; розпад чи стійкість системи визначається початковими параметрами, такими як середня швидкість зір (тобто повна кінетична енергія) при старті комп'ютерної симуляції;
- 5) при невеликій початковій швидкості об'єктів досліджуваного скупчення (симуляції 1 і 2) система залишається стійкою; при збільшенні повної кінетичної енергії зір у скупченні (симуляція 3) стійкість системи порушується;
- б) граничне значення дисперсії швидкостей зір, при якому система досліджуваних об'єктів перестає бути стійкою, отримане у роботі шляхом аналізу результатів симуляцій складає  $\langle v \rangle = 0.6$  км/с.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрієвський С.М., Климишин І. А. Курс загальної астрономії. Одеса. Астропринт, 2007. – 480 с.
2. Богословский М. М. Теории гравитации и её механизмы. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.proatom.ru/modules.php?name=News&file=article&sid=7911>
3. Бутиков Е. И. Компьютерное моделирование движений космических тел. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://docplayer.com/52359801-Butikov-e-i-kompyuternoe-modelirovanie-dvizheniy-kosmicheskikh-tel.html>
4. Головки М. В. , Крячко І. П. Астрономія: навчальний посібник. К.: ТОВ «Конті принт», 2018. – 272 с.
5. Чирцов А.И. Гравитация: развитие взглядов от Ньютона до Эйнштейна. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://www.youtube.com/watch?v=p\\_jSOv-lbFE](https://www.youtube.com/watch?v=p_jSOv-lbFE)
6. Gravitational fields and the theory of general relativity. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.britannica.com/science/gravity-physics/Gravitational-fields-and-the-theory-of-general-relativity>
7. Karttunen Hannu, Kroger Pekka. Fundamental Astronomy. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2017. – 550с.
8. Mikael Davidsson | Cantor's Paradise. Gravity as Geometry. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.cantorsparadise.com/gravity-as-geometry-4e02450512ff>
9. What is gravity? A guide to nature's most mysterious force (and what we still don't know). [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.sciencefocus.com/space/gravity/>
10. Gravitational N-body Simulations. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://arxiv.org/pdf/0806.3950.pdf>
11. Скрипт на мові Python. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://github.com/pmocz/nbody-python>

12. Мессье 3. [Электронный ресурс]. – Режим доступа:  
[https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%81%D1%81%D1%8C%D1%94\\_3](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%81%D1%81%D1%8C%D1%94_3)

13. Стожари (M 45). [Электронный ресурс]. – Режим доступа:  
<https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%BE%D0%B6%D0%B0%D1%80%D0%B8>

## ДОДАТКИ

## Додаток А

## Код скрипту програми

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation

"""
CreateYourOwn N-bodySimulation (WithPython)
PhilipMocz (2020) PrincetonUniveristy, @PMocz

Simulateorbitalsofstarsinteractingduetogravity
CodecalculatespairwiseforcesaccordingtoNewton'sLawofGravity
"""

"""
Modifiedby
Bohdan Petrenko (2021)
GrygorianKarina (2021)

Introducinggravitationalconstantinspecialunitsswithsomechangesinequations
"""

def getAcc( pos, mass, G, softening ):
    """
    Calculate the acceleration on each particle due to Newton's Law
    pos is an N x 3 matrix of positions
    mass is an N x 1 vector of masses
    G is Newton's Gravitational constant
    softening is the softening length
    a is N x 3 matrix of accelerations
    """
    # positions r = [x,y,z] for all particles
    x = pos[:,0:1]
    y = pos[:,1:2]
    z = pos[:,2:3]

    # matrix that stores all pairwise particle separations: r_j - r_i
    dx = x.T - x
    dy = y.T - y
    dz = z.T - z

    # matrix that stores 1/r^3 for all pairwise particle separations
    inv_r3 = (dx**2 + dy**2 + dz**2 + softening**2)
    inv_r3[inv_r3>0] = inv_r3[inv_r3>0]**(-1.5)

    ax = G * (dx * inv_r3) @ mass
    ay = G * (dy * inv_r3) @ mass
    az = G * (dz * inv_r3) @ mass

```

```

# packtogethertheaccelerationcomponents
a = np.hstack((ax,ay,az))

return a

defgetEnergy( pos, vel, mass, G ):
    """
    Getkineticenergy (KE) andpotentialenergy (PE) ofsimulation
    posis N x 3 matrixofpositions
    velis N x 3 matrixofvelocities
    massisan N x 1 vectorofmasses
    G isNewton'sGravitationalconstant
    KE isthekineticenergyofthesystem
    PE isthepotentialenergyofthesystem
    """
    # KineticEnergy:
    KE = 0.5 * np.sum(np.sum( mass * vel**2 ))

    # PotentialEnergy:

    # positions r = [x,y,z] forallparticles
    x = pos[:,0:1]
    y = pos[:,1:2]
    z = pos[:,2:3]

    # matrixthatstoresallpairwiseparticleseparations: r_j - r_i
    dx = x.T - x
    dy = y.T - y
    dz = z.T - z

    # matrixthatstores 1/r forallparticlepairwiseparticleseparations
    inv_r = np.sqrt(dx**2 + dy**2 + dz**2)
    inv_r[inv_r>0] = 1.0/inv_r[inv_r>0]

    # sumoveruppertriangle, tocounteachinteractiononlyonce
    PE = G * np.sum(np.sum(np.triu(-(mass*mass.T)*inv_r,1)))

    return KE, PE;

defmain():
    """ N-bodysimulation """
    year = 365 * 24 * 3600
    km_per_parsec = 3.08E13
    # Simulationparameters
    N          = 2      # Numberofparticles
    t          = 0      # currenttimeofthesimulation
    tEnd       = 20000000.0 * year # timeatwhichsimulationends
    dt         = 100000 * year   # timestep

```

```

softening = 0.1 # softeninglength
G          = 4.3E-3 # Newton'sGravitationalConstantinunitspc * solarmass^-1 * (km/s)^2
plotRealTime = True# switchonforplottingasthesimulationgoesalong

# GenerateInitialConditions
np.random.seed(17) # settherandomnumbergeneratorseed

star_mass = 10
mass = star_mass*np.ones((N,1)) # totalmassofparticles
pos  = 2*np.random.randn(N,3) # randomlyselectedpositions
vel  = 0.0*np.random.randn(N,3) # randomlyselectedvelocities
print("Initialvelocities: ", vel)

# Convertto Center-of-Mass frame
vel -= np.mean(mass * vel,0) / np.mean(mass)

# calculateinitialgravitationalaccelerations
acc = getAcc( pos, mass, G, softening ) / km_per_parsec

# calculateinitialenergyofsystem
KE, PE = getEnergy(pos, vel, mass, G )

# numberoftimesteps
Nt = int(np.ceil(tEnd/dt))

# saveenergies, particleorbitalforplottingtrails
pos_save = np.zeros((N,3,Nt+1))
pos_save[:, :,0] = pos
KE_save = np.zeros(Nt+1)
KE_save[0] = KE
PE_save = np.zeros(Nt+1)
PE_save[0] = PE
t_all = np.arange(Nt+1)*dt / year

# prepfigure
fig = plt.figure(figsize=(4,5), dpi=80)
grid = plt.GridSpec(3, 1, wspace=0.0, hspace=0.3)
ax1 = plt.subplot(grid[0:2,0])
ax2 = plt.subplot(grid[2,0])

# SimulationMainLoop
for i inrange(Nt):
    # (1/2) kick
    vel += acc * dt/2.0

    # drift
    pos += vel * dt / km_per_parsec
    # print("pos:", pos)
    # print("vel:", vel)

    # updateaccelerations

```



```

acc = getAcc( pos, mass, G, softening ) / km_per_parsec

# (1/2) kick
vel += acc * dt/2.0

# updatetime
t += dt

# getenergyofsystem
KE, PE = getEnergy( pos, vel, mass, G )
print(KE, PE)

# saveenergies, positionsforplottingtrail
pos_save[:, :, i+1] = pos
KE_save[i+1] = KE
PE_save[i+1] = PE

# plotinrealtime
ifplotRealTimeor (i == Nt-1):
    plt.sca(ax1)
    plt.cla()
    xx = pos_save[:, 0, max(i-50, 0):i+1]
    yy = pos_save[:, 1, max(i-50, 0):i+1]
    plt.scatter(xx, yy, s=1, color=[.7, .7, 1])
    plt.scatter(pos[:, 0], pos[:, 1], s=10, color='blue')
    ax1.set(xlim=(-10, 10), ylim=(-10, 10))
    ax1.set_aspect('equal', 'box')
    ax1.set_xlabel('pc')
    ax1.set_ylabel('pc')
    # ax1.set_xticks([-2, -1, 0, 1, 2])
    # ax1.set_yticks([-2, -1, 0, 1, 2])

    plt.sca(ax2)
    plt.cla()
    plt.scatter(t_all, KE_save, color='red', s=1, label='KE'if i == Nt-1else'')
    plt.scatter(t_all, PE_save, color='blue', s=1, label='PE'if i == Nt-1else'')
    plt.scatter(t_all, KE_save+PE_save, color='black', s=1, label='Etot'if i == Nt-
1else'')
    ax2.set(xlim=(0, tEnd / year), ylim = [-2*star_mass*N, 2*star_mass*N])

    # ax2.set_aspect(0.007)

    plt.pause(0.001)

# addlabels/legend
plt.sca(ax2)
plt.xlabel('time')
plt.ylabel('energy')
ax2.legend(loc='upperright')

```

```
# Savefigure
plt.savefig('nbody_run_0.png',dpi=240)
plt.show()

return 0

if __name__ == "__main__":
    main()
```