Все буде Україна!

Київська Мала академія наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

І етап Всеукраїнської олімпіади з математики

Районна олімпіада юних математиків в місті Києві

Умови та розв'язання задач

Київ, 17 жовтня 2026 року

«Відважтеся мислити самостійно».
Вольтер

8 клас

8–1. Одноцифрове число a та двоцифрове число b задовольняють умову: $25a = 6b$. Чому може дорівнювати сума $a + b$?

Відповідь: 31.
Розв'язання. Оскільки 25 та 6 не мають спільних дільників, то число a має бути кратним 6. Очевидно, що $a = 6$, тоді $b = 25$. Звідси випливає, що $a + b = 31$.

8–2. У прямокутнику $ABCD$ точка M – середина відрізка CD, а N – середина відрізка AM. Знаючи, що $AM \perp BN$, знайдіть градусну міру $\angle ABM$.

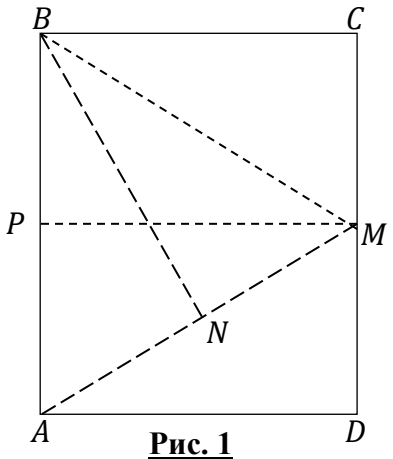

Рис. 1

Відповідь: 60°.
Розв'язання. Оскільки точка N – середина відрізка AM та основа висоти, то ΔABM – рівнобедрений, тобто $AB = BM$ (рис. 1). Проведемо відрізок PM, де P – середина відрізка AB. Тоді $\Delta BCM = \Delta BMP = \Delta ADM = \Delta AMP$ оскільки діагональ розбиває прямокутник на два рівних трикутника. Звідси $AM = BM = AB$ та ΔABM – рівносторонній, тому $\angle ABM = 60°$.

8–3. Петрик розташував перші 9 натуральних чисел у клітинках таблиці 3×3. У центральній клітинці він записав число 8. Сума чисел у чотирьох клітинках кожного квадрата 2×2 цієї таблиці дорівнює 23. Чому може дорівнювати сума чисел у чотирьох кутових клітинках?

a	x	b
y	8	z
c	t	d

Рис.2

Відповідь: 14.
Розв'язання. Нехай числа в табличці позначені, як на рис. 2. Якщо додати суми чисел в усіх чотирьох можливих квадратах 2×2, то матимемо, що ця сума з одного боку дорівнює

$$(a + b + c + d) + 2(x + y + z + t) + 8 \cdot 4,$$

а з іншого – це $23 \cdot 4 = 92$. Оскільки $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, то

$$(a + b + c + d) + (x + y + z + t) + 8 = 45 \;\Rightarrow\; (x + y + z + t) = 37 - (a + b + c + d) \;\Rightarrow$$
$$(a + b + c + d) + 2\big(37 - (a + b + c + d)\big) = 92 - 32 = 60,$$

звідси остаточно знаходимо, що $a + b + c + d = 74 - 60 = 14$.

8–4. Відомо, що для цілих чисел a, b, c вираз $4a + 5b - 3c$ ділиться націло на 19. Чи обов'язково і вираз $6a - 2b + 5c$ буде ділитися на 19?

Відповідь: так.
Розв'язання. Запишемо задану умову таким чином:

$$4a + 5b - 3c = 19k \;\Rightarrow c = \frac{4a}{3} + \frac{5b}{3} - \frac{19k}{3},$$

тоді

$$6a - 2b + 5c = 6a - 2b + \frac{20a}{3} + \frac{25b}{3} - \frac{95k}{3} = \frac{19 \cdot 2a}{3} + \frac{19b}{3} - \frac{19 \cdot 5k}{3}.$$

Звідси випливає, що число $3 \cdot (6a - 2b + 5c) = 19 \cdot (2a + b - 5k)$ ділиться націло на 19, а тому, оскільки 3 і 19 взаємо прості, на 19 ділиться і число $6a - 2b + 5c$, що й треба було довести.

8–5. У Петрика є квадрат 10×10. По черзі він випадково вибирає одну зі ста клітинок 1×1 цього квадрата і записує в неї число. Число, яке він вписує в клітинку, завжди дорівнює загальній кількості вже заповнених клітинок у рядку та стовпці цього квадрата, де розташована дана клітинка. Тож у першій клітинці він записує число 0,

у другій клітинці – число 0 або 1, залежно від того, чи вона знаходиться в іншому рядку та іншому стовпці, чи ні, з попередньою клітинкою, і так далі. Отже, в кожній клітинці буде записане число від 0 до 18 включно. Після того, як Петрик вписав число в кожну клітинку, він додає всі записані числа. Який можливий результат цього додавання? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 900.
Розв'язання. Ми доведемо, що результат цього додавання завжди дорівнює 900.
У кожній клітинці запишемо ще два числа: жовтим кольором загальну кількість клітинок, які вже заповнені в рядку цього квадрата, а червоним кольором загальну кількість клітинок, які вже заповнені в стовпці цього квадрата. Число, яке записує Петрик, це жовте число плюс червоне число. Якщо ви подивитеся на жовті числа в кожному рядку, ви побачите, що отримуєте числа від 0 до 9: перша обрана клітинка отримує 0, наступний – 1 і так далі. Аналогічно, ви отримуєте червоні числа від 0 до 9 у кожному стовпці. Отже, сума жовтих чисел у рядку (і червоних чисел у стовпці) дорівнює $0 + 1 + \cdots + 9 = 45$. Всього є 10 рядків і 10 стовпців. Отже, загальна сума завжди дорівнює $20 \cdot 45 = 900$.

8–4.1. Знайдіть усі такі пари простих чисел (p, q), що задовольняють рівності:

$$20p + 27q = 2027.$$

Відповідь: $p = 19$ та $q = 61$.
Розв'язання. Виходячи з останньої цифри просте число q має закінчуватися цифрою 1, крім того $q \leq 75$, таким чином вибір числа q треба робити з чисел 11, 31, 41, 61 або 71. Для кожного з цих чисел знайдемо відповідні p.
$q = 11 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 11 = 1730$, тому p – не ціле.
$q = 31 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 31 = 1190$, тому p – не ціле.
$q = 41 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 41 = 920$, тому $p = 46$ – не просте.
$q = 61 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 61 = 380$, тому $p = 19$ – задовольняє умову.
$q = 71 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 71 = 110$, тому p – не ціле.
Таким чином $p = 19$ та $q = 61$ – єдиний розв'язок.

8–5.1. Петрик виписує на дошку набір чисел. Першим та другим числами цього набору є числа 2022 та 21 відповідно. Кожне наступне число набору дорівнює модулю різниці двох попередніх, тобто третє число – це число $2001 = |2022 - 21|$, четверте – це число $1980 = |2001 - 21|$ і так далі. Під яким номером в цьому наборі вперше з'явиться число 0?

Відповідь: 154.
Розв'язання. Легко зрозуміти, що 2-ге, 5-те, 8-ме числа цього набору дорівнюють 21, доки не з'явиться менше число ніж 21. Інші числа утворюються послідовним відніманням від 2022 числа 21: 2022, 2001, 1980, 1959, …:

$$\underbrace{2022}_{1}, \underbrace{21}_{2}, \underbrace{2001}_{3} = 2022 - 21, \underbrace{1980}_{4} = 2001 - 21, \underbrace{21}_{5} = 2001 - 1980,$$

$$\underbrace{1959}_{6} = 1980 - 21, \underbrace{1938}_{7} = 1959 - 21, \underbrace{21}_{8} = 1959 - 1938, \ldots$$

Таким чином останні числа набору цього циклу такі:

$$\underbrace{2022}_{1}, \underbrace{21}_{2}, \underbrace{2001}_{3}, \underbrace{1980}_{4}, \ldots, \underbrace{90}_{139}, \underbrace{21}_{140}, \underbrace{69}_{141}, \underbrace{48}_{142}, \underbrace{21}_{143}, \underbrace{27}_{144}.$$

Далі просто знаходимо наступні числа набору, доки не з'явиться вперше число 0:

$$\underbrace{6}_{145}, \underbrace{21}_{146}, \underbrace{15}_{147}, \underbrace{6}_{148}, \underbrace{9}_{149}, \underbrace{3}_{150} \underbrace{6}_{151}, \underbrace{3}_{152}, \underbrace{3}_{153}, \underbrace{0}_{154}.$$

Шуканий номер числа набору 154.

9 клас

9–1. Знайдіть усі такі пари простих чисел (p, q), що задовольняють рівності:

$$20p + 43q = 2026.$$

Відповідь: $p = 97$ та $q = 2$.
Розв'язання. Оскільки $43q = 2026 - 20p$, то число q—парне і просте, а тому $q = 2$. Тоді

$$20p = 2026 - 43q = 1940 \Rightarrow p = 97.$$

Оскільки $p = 97$ – просте число, то шукана пара $(p, q) = (97,2)$ є шукана пара.

9–2. На стороні BC рівностороннього трикутника ABC вибрана точка N. На промені AB за точкою B вибрана точка D, що задовольняє умову $CN = BD$. На стороні AB вибрана така точка K, що відрізок $NK \perp AB$. Доведіть, що точка K є серединою відрізка AD.

Розв'язання. Виберемо на стороні AC точку E та на стороні AB точку M таким чином, щоб $NE||AB$ та $MN||AC$ (рис. 3). Тоді ΔCNE та ΔMNB – рівносторонні, бо мають усі відповідні кути рівними кутам ΔABC, тобто по 60° кожний. Відрізок NK є висотою, а тому й медіаною ΔMNB, тому $MK = KB$. Крім того, оскільки за побудовою $AMNE$ – паралелограм, то маємо такі рівності: $BD = CN = AM$, але тоді $AM + MK = KB + BD$, що й завершує доведення.

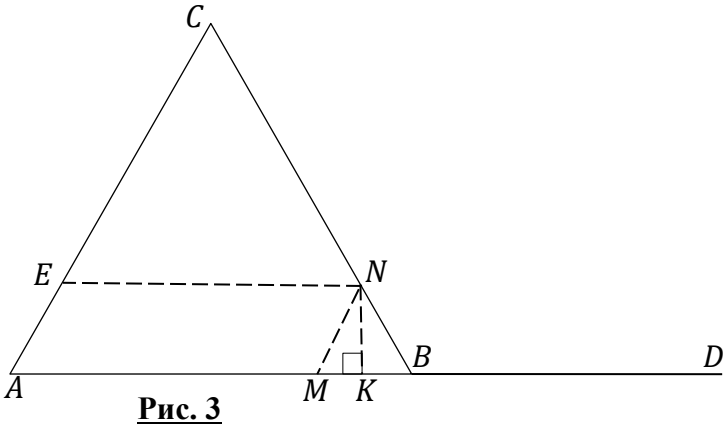

Рис. 3

9–3. Для додатних чисел a, b, c, d доведіть, що принаймні одне з трьох рівнянь:

$$ax^2 + b(d + 2)x + c = 0, bx^2 + c(d + 2)x + a = 0, cx^2 + a(d + 2)x + b = 0$$

має дійсний корінь.

Розв'язання. Зробимо заміну $t = d + 2 > 2$. Припустимо, методом від супротивного, що жодне з трьох рівнянь коренів не має, тоді дискримінант кожного з рівнянь є від'ємним, тому

$$b^2t^2 < 4ac, c^2t^2 < 4ba, a^2t^2 < 4cb.$$

Перемножимо ці нерівності і матимемо, що $a^2b^2c^2t^6 < 64a^2b^2c^2 \Rightarrow t^6 < 64 \Rightarrow \mathrm{t} < 2$. Одержана суперечність завершує доведення.

9–4. Знайдіть усі пари натуральних чисел (x, y), що задовольняють рівності:

$$x^3 - y^3 = 987654.$$

Відповідь: таких чисел не існує.
Розв'язання. Припустимо, що шукані числа існують. Нехай тоді

$$x - y = a, x^2 + xy + y^2 = b, ab = 987654.$$

З цих двох рівностей отримуємо, що $x = a + y$ та

$$b = x^2 + xy + y^2 = (a + y)^2 + (a + y)y + y^2 = a^2 + 2ay + y^2 + ay + y^2 + y^2 =$$
$$= a^2 + 3ay + 3y^2 \Rightarrow b - a^2 = 3ay + 3y^2.$$

З останньої рівності числа a та b одночасно або діляться на 3, або ні. З умови $ab = 987654 \vdots 3$ випливає, що вони мають ділитися на 3, але тоді $ab \vdots 9$, що суперечить умові, бо 987654 не ділиться на 9. Одержана суперечність показує, що таких чисел не існує.

9–5. У кожне поле квадратної таблиці розміром $n \times n$ записане деяке число так, що сума всіх записаних чисел додатна. Доведіть, що стовпці таблиці можна переставити

так, щоб сума чисел принаймні на одній із діагоналей таблиці стала додатною.

Розв'язання. Зафарбуємо клітинки таблиці у n кольорів, як це показано на рис. 4. По діагоналі розташовані усі клітинки кольору 1. Переставимо перший стовпчик на останнє місце, тоді по діагоналі будуть розташовані усі клітинки з кольором 2 (рис. 5). Знову переставимо перший стовпчик на останнє місце і по діагоналі стануть клітинки з кольором 3 (рис. 6). Таким чином зробивши усі аналогічні кроки побачимо, що по діагоналі будуть усі клітинки кожного з кольорів. Якщо кожного разу сума чисел по діагоналі не додатна, то і сума усіх чисел таблиці не додатна. Одержана суперечність показує, що в якійсь момент по діагоналі стояли числа, сума яких додатна.

1	**2**	**3**	**…**	**…**	**n**		**2**	**3**	**…**	**…**	**n**	**1**		**3**	**…**	**…**	**n**	**1**	**2**
n	**1**	**2**	**3**	**…**	**n-1**		**1**	**2**	**3**	**…**	**n-1**	**n**		**2**	**3**	**…**	**n-1**	**n**	**1**
n-1	**n**	**1**	**2**	**3**	**…**		**n**	**1**	**2**	**3**	**…**	**n-1**		**1**	**2**	**3**	**…**	**n-1**	**n**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**		**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**		**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
3	**…**	**…**	**…**	**1**	**2**		**…**	**…**	**…**	**1**	**2**	**3**		**…**	**…**	**1**	**2**	**3**	**…**
2	**3**	**…**	**…**	**…**	**n**		**3**	**…**	**…**	**…**	**n**	**2**		**…**	**…**	**…**	**n**	**2**	**3**
Рис. 4							**Рис. 5**							**Рис. 6**					

9–4.1. Знайдіть усі двоцифрові числа $\overline{ab}$, для яких натуральним числом є значення виразу $\sqrt{\overline{ab}+\sqrt{b}}$.

Відповідь: 14, 34.
Розв'язання. Нехай цей вираз дорівнює деякому натуральному числу n, тобто

$$\sqrt{\overline{ab}+\sqrt{b}}=n \;\Rightarrow\; \sqrt{b}=n^2-\overline{ab}-\text{ціле число.}$$

Таким чином, цифра b має бути такою, корінь з якої є цілим числом, тобто $b=0,1,4,9$. Залишається розглянути ці випадки.
Випадок 1. $b=0$, тоді $\sqrt{10a}$ не може бути натуральним числом ні при якому a.
Випадок 2. $b=1$, тоді $\sqrt{10a+1+1}=\sqrt{\overline{a2}}$ не може бути натуральним числом ні при якому a.
Випадок 3. $b=4$, тоді $\sqrt{10a+4+2}=\sqrt{\overline{a6}}$ може бути натуральним числом при $a=1$ та $a=3$.
Випадок 4. $b=9$, тоді $\sqrt{10a+9+3}=\sqrt{\overline{A2}}$ не може бути натуральним числом ні при якому a.

9–5.1. Дано взаємно прості натуральні числа n та m. У кожній клітинці таблиці з n рядками та m стовпцями записане натуральне число. Відомо, що сума чисел у кожному рядку дорівнює 196, а сума чисел у кожному стовпці дорівнює 20. Які значення може приймати сума $m+n$?

Відповідь: 49.
Розв'язання. Сума чисел у таблиці дорівнює $196n=20m \Leftrightarrow 49n=5m$. Оскільки m та n є взаємо простими числами, то $n=5$ та $m=49$. Звідки маємо, що $m+n=49$.

10 клас

10–1. Квиток на футбол коштує 240 грн, а зі знижкою – 150 грн. На гру «Динамо» – «Шахтар» продали x квитків обох типів на загальну суму 4440 грн. Яке найменше значення може приймати величина x?

Відповідь: 20.
Розв'язання. Нехай купили a повних квитків та b квитків зі знижкою. Тоді $240a+150b=4440$ та $x=a+b$. Тоді $24a+15b=444$. Найменшу кількість квитків x можна купити за умови, що найменше можливе значення приймає величина b, оскільки $24x=24(a+b)=444+9b$. Підберемо найменше значення b, для якого справджується рівність: $24a+15b=444$.

Зрозуміло, що b – парне число.
При $b = 0$ маємо, що a – не ціле число, варіант неможливий.
При $b = 2$ маємо, що a – не ціле число, варіант неможливий.
При $b = 4$ маємо, що $a = 16$. Тобто цей варіант – шуканий, сумарно купили $4 + 16 = 20$ квитків.

10–2. У чотирикутнику $ABCD$ середини сторін AB та CD позначимо через E та F відповідно. Відрізки AF, BF, CE, DE та EF розділяють чотирикуник $ABCD$ на 8 трикутників, площі яких ми позначимо a, b, c, d та p, q, r, s, як це показано на рис. 7. Доведіть, що справджується рівність: $a + r = c + p$.

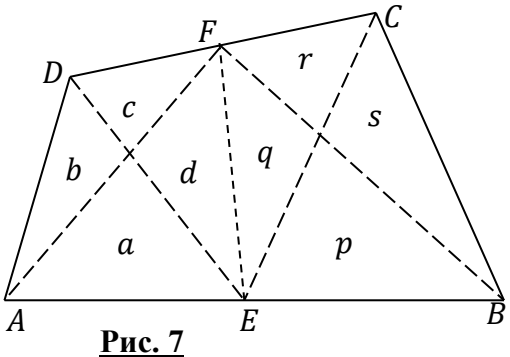

Рис. 7

Розв'язання. Зрозуміло, що справджуються така рівність: $a + d = p + q$, оскільки це рівносильне тому, що $S_{AEF} = S_{BEF}$. А це в свою чергу випливає з того, що ці трикутники мають спільну висоту та рівні основи $AE = EB$. Аналогічно $S_{CEF} = S_{DEF}$, звідки $c + d = r + q$. Віднімемо одержані дві рівності:

$$(a + d) - (c + d) = (p + q) - (r + q) \Rightarrow a - c = p - r \Rightarrow a + r = p + c,$$

що доводить першу рівність.

10–3. Сума семи натуральних чисел дорівнює 111. Яке найбільше можливе значення найбільшого спільного дільника цих семи чисел?

Відповідь: 3.
Розв'язання. Якщо кожне з семи чисел ділиться на число d, то на d ділиться і їхня сума, тобто $111 = 3 \cdot 37 \vdots d$. Якщо припустити, що $d = 37$ або $d = 111$, то сума цих семи чисел більше 111, що неможливо. Таким чином найбільше можливе значення найбільшого спільного дільника – це $d = 3$. Приклад шуканих семи чисел може бути таким: $3, 3, 3, 3, 3, 3$ та 93.

10–4. Функція $f: R \to R$ для кожного дійсного x задовольняє умову $f(f(x)) = 4x + 1$. Скільки коренів може мати рівняння: $f(x) = x$? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 1.
Розв'язання. Припустимо, що x_0 задовольняє умову $x = f(x)$, то

$$x_0 = f(x_0) = f(f(x_0)) = 4x_0 + 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{3}.$$

З іншого боку:

$$f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right) = 4f\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

що й завершує доведення.

10–5. У кожну комірку 1×1 квадрата 100×100 записане деяке число. У верхньому рядку зліва направо записані послідовно числа $0, 1, 2, \ldots, 99$. Аналогічно, у лівому стовпчику зверху до низу записані послідовно числа $0, 1, 2, \ldots, 99$. Усі числа, що записані в таблицю, задовольняють умові: сума чотирьох чисел у кожному з квадратів 2×2 дорівнює 20. Яке число записане у правій нижній комірці?

Відповідь: -178.
Розв'язання. Пофарбуємо квадрат в шаховому порядку – ліва верхня та права нижня комірки при

цьому фарбуванні будуть білі, а ліва нижня та права верхня – чорні. Розглянемо усі $99 \cdot 99 = 9801$ квадратів 2×2, які назвемо блоками. З цих блоків 4901 мають ліву верхню комірку білою, а 4900 – чорною. Відповідно до цього блоки будемо називати білими та чорними. Додаймо чотири числа кожного з 4901 білих блоків, а далі знайдемо суму усіх отриманих чисел та позначимо її через W. Аналогічно позначимо суму чисел у чорних блоках через Z. Оскільки чорних блоків рівно на 1 менше, тому $W - Z = 20$.

Подивимося, скільки разів число у кожній комірці рахується в певних сумах. Число у кожній кутовій комірці рахується тільки в білих блоках і рівно 1 раз. Кожне інше число на межі рахується рівно 1 раз у білих блоках та рівно 1 раз – у чорних. Усі інші комірки – внутрішні – рахуються рівно 2 рази у білих блоках та рівно 2 рази – у чорних. Таким чином у виразі $W - Z$ після скорочення залишиться лише сума чотирьох кутових комірок. Позначимо число у правій кутовій комірці через x, тоді маємо рівність:

$$W - Z = 0 + 99 + 99 + x = 20 \Rightarrow x = -178.$$

10–4.1. Для довільних дійсних чисел a, b, c з'ясуйте, яке найменше значення може приймати вираз

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24?$$

Відповідь: 20 при $a = 4, b = 2, c = 1$.

Розв'язання. Оскільки заданий вираз можна вважати квадратним тричленом відносно змінної a, то мінімальне значення він набуває у вершині, тобто при $a = -\frac{-4b}{2} = 2b$. Тоді шуканий вираз матиме такий вигляд:

$$4b^2 + 5b^2 + 8c^2 - 8b^2 - 4bc - 8c + 24 = b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24.$$

Тепер цей вираз вважатимемо квадратним відносно змінної b, він набуває найменшого значення при $b = -\frac{-4c}{2} = 2c$. Шуканий вираз стає таким:

$$4c^2 + 8c^2 - 8c^2 - 8c + 24 = 4c^2 - 8c + 24.$$

Ця парабола має найменше значення у вершині, тобто при $c = -\frac{-8}{8} = 1$.

Таким чином шукане найменше значення дорівнює $4 - 8 + 24 = 20$ і досягається при $c = 1$, $b = 2c = 2$, $a = 2b = 4$.

10–5.1. У кожну клітинку прямокутної таблиці завбільшки 17×19 записані попарно різні непарні натуральні числа. Доведіть, що при будь-якому такому заповненні числами, завжди знайдуться дві клітинки зі спільною стороною, в яких записані числа з різницею, що більша або дорівнює 20.

Розв'язання. Дві клітинки зі спільною стороною назвемо суміжними. Зауважимо, що різниця будь-яких двох чисел у суміжних клітинках є парним числом. Припустимо, що найбільша можлива різниця дорівнює 18. Без обмеження спільності можна вважати, що найменше число в таблиці дорівнює 1. Нехай найбільше буде M. Оскільки числа різні та непарні, маємо $M \geq 2 \cdot 17 \cdot 19 - 1 = 645$. Розглянемо клітинки, які містять числа 1 та M, і найкоротший ланцюжок суміжних клітинок, який з'єднує ці дві клітинки. Цей ланцюжок має не більше $(17 - 1) + (19 - 1) = 34$ клітинок (за винятком першої), а різниці між числами в будь-яких двох суміжних не перевищують 18. Тоді $M \leq 1 + 34 \cdot 18 = 613$, що суперечить нерівності для M, отриманій вище.

11 клас

11–1. Знайдіть усі такі значення c, для яких рівняння $27x^2 - 12x + c = 0$ має два корені, один з яких є квадратом другого.

Відповідь: 1 та -64.

Розв'язання. Позначимо корені x_1 та $x_2 = t$, при цьому нехай $x_1 = x_2^2 = t^2$. Тоді з теореми Вієта маємо рівності: $x_1 x_2 = \frac{c}{27}$ та $x_1 + x_2 = \frac{12}{27}$. З другого рівняння знаходимо, що $t^2 + t - \frac{4}{9} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$,

$t = -\frac{4}{3}$. Звідси знаходимо шукані значення для $c = 27x_1x_2$:

$$27x_1x_2 = 27 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = 1 \text{ та } 27x_1x_2 = 27 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{16}{9} = -64.$$

11–2. Правильні п'ятикутник $ABCDE$ та дев'ятикутник $AMNOPQRSE$ розташовані так, як це показано на рис. 8. Знайдіть градусну міру $\angle MBC$.

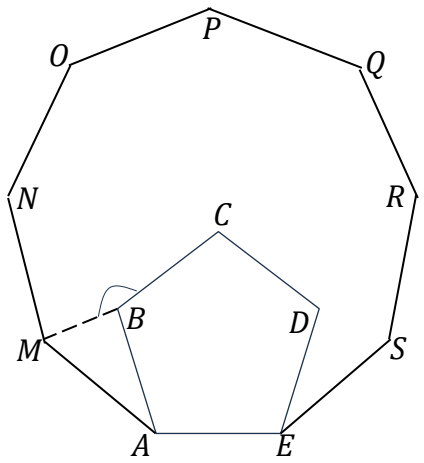

Рис. 8

Відповідь: 178°.

Розв'язання. З формули суми кутів многокутника маємо, що $\angle BAE = 108°$, $\angle MAE = 140° \Rightarrow \angle MAB = 140° - 108° = 32°$. Оскільки ΔMBA – рівнобедрений, то $\angle MBA = \frac{1}{2}(180° - 32°) = 74°$. Тоді

$$\angle MBC = 360° - \angle MBA - \angle ABC = 360° - 74° - 108° = 178°.$$

11–3. Яка найбільша можлива сума цифр шестицифрового числа, яке ділиться на кожне з чисел: 5, 6, 7, 8 та 9?

Відповідь: 36.

Розв'язання. Число має закінчуватися на 0, бо інакше, воно не зможе одночасно ділитися на 5 та 8. Сума цифр має бути кратною 9, таким чином подільність на 6 забезпечується автоматично. Залишаються умови, щоб трицифрове число, що утворюють 3 останні цифри ділилося на 8 та все число ділилося на 7. Оскільки ми маємо останньою цифрою 0, то сума інших 5 цифр не перевищує 45. Але таке число єдине і дорівнює 999990, яке очевидно не задовольняє умову, бо, наприклад, воно не ділиться на 8.

Оскільки шукане число з максимальною сумою цифр кратне 9, то наступною за величиною може бути сума цифр 36. Покажемо, що 36 – шукана відповідь, підібравши відповідний приклад: 992880. Щоб його знайти достатньо було розглянути 7 чисел:

$$992880, 983880, 974880, 965880, 956880, 947880, 938880, 929880.$$

Усі числа відрізняються на 9000, а тому вони мають утворювати повну групу остач при діленні на 7, тому серед них гарантовано є кратне 7.

11–4. Петрик написав усі натуральні числа від 1 до 1000 включно, а Василь витер деякі з них. Виявилося, що серед чисел, що лишилися не витертими:

- рівно 272 числа, у записі яких зустрічається цифра 1;
- рівно 271 число, у записі яких зустрічається цифра 2;
- рівно 270 чисел, у записі яких немає ні цифри 1, ні цифри 2.

Скільки чисел витер Василь?

Відповідь: 241.

Розв'язання. Порахуємо методом виключення кількість чисел від 1 до 1000, що містять цифру 1. Не містять цифру 1: серед одноцифрових таких 8, серед двоцифрових таких $8 \cdot 9 = 72$, серед трицифрових таких $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$, серед чотироцифрових 0. Разом 728. Таким чином чисел, що містять цифру 1, маємо $1000 - 728 = 272$. Тобто не було викреслене жодне число, що не містить цифру 1.

Так само ми знаходимо, що серед чисел від 1 до 1000 є 729 чисел, які не містять цифри 2 у своєму записі. Отже $1000 - 729 = 271$ чисел від 1 до 1000 містять у своєму записі цифру 2. Таким чином усі числа, що містять цифру 2 не були викреслені.

Залишається порахувати, скільки чисел від 1 до 1000 не містять у своєму записі цифр 1 та 2. Серед одноцифрових таких 7, серед двоцифрових таких $7 \cdot 8 = 56$, серед трицифрових таких $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$, серед чотироцифрових 0. Разом 511. Таким чином чисел, що не містять цифр 1 та 2 маємо 511. Таким чином викресленими були $511 - 270 = 241$ чисел.

11–5. Нехай кола з центрами в точках K_1 та K_2 та радіусами R_1 та R_2 відповідно, дотикаються зовнішнім чином у точці A. Позначимо через ε – спільну зовнішню дотичну до цих кіл. Перпендикуляр до прямої ε, який проходить через точку A, перетинає серединний перпендикуляр до відрізку K_1K_2 у точці B. Доведіть, що справджується рівність: $K_1K_2 = 2AB$.

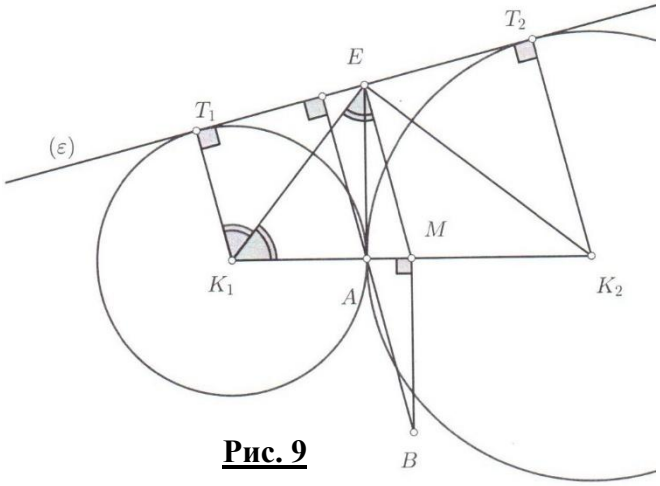

Рис. 9

Розв'язання. Нехай T_1 та T_2 відповідно – точки дотику прямої ε з заданими колами (рис. 9). Проведемо спільну дотичну до цих кіл через точку A, що перетинає пряму ε у точці E.
За побудовою $\Delta K_1T_1E = \Delta K_1AE$, як прямокутні з спільною гіпотенузою та рівними катетами. Аналогічно $\Delta K_2T_2E = \Delta K_2AE$. Тоді

$$\angle T_1EK_1 = \angle AEK_1, \angle T_2EK_2 = \angle AEK_2.$$

Тоді

$$180° = \angle T_1EK_1 + \angle AEK_1 + \angle AEK_2 + \angle T_2EK_2 \Rightarrow$$
$$90° = \angle AEK_1 + \angle AEK_2,$$

тому ΔK_1EK_2 – прямокутний. Нехай точка M – середина відрізка K_1K_2. Тоді EM – медіана з прямого кута ΔK_1EK_2, тому $K_1K_2 = 2EM$. Для завершення доведення достатньо показати, що $EABM$ – паралелограм.
Оскільки EA та BM – перпендикуляри до прямої K_1K_2, то вони паралельні. З рівності $ME = MK_1$, то $\angle MEK_1 = \angle MK_1E = \angle AK_1E$, крім того $\angle AK_1E = \angle T_1K_1E$, тому $\angle MEK_1 = \angle T_1K_1E$, звідки випливає, що $ME||T_1K_1$. Крім того AB паралельно K_1T_1 як перпендикуляри до прямої ε. Тому $ME||AB$, що й завершує доведення.

11–4.1. У школі у Іванки 75 друзів, а у Петрика – 77 друзів. У кожного з інших учнів у цій школі рівно по 76 друзів. Коли учень дізнається таємницю, він ділиться нею зі своїми друзями. Доведіть, що якщо Іванка дізнається таємницю, то через деякий час її дізнається і Петрик.

Розв'язання. Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що Петрик не дізнається секрету. Це означає, що в них з Іванкою не існує ланцюга друзів, що ведуть від одного до іншого. Тобто, якщо розглянути множину I усіх школярів, які дізнаються секрет від Іванки за певний час, то там у Іванки 75 друзів, а в усіх інших – по 76. Додамо кількості друзів кожного школяра множини I. Це буде непарне число вигляду $76k + 75$. Але при такому додаванні кожна пара друзів порахована двічі, тобто це число має бути парним. Одержана суперечність завершує доведення.

11–5.1. У чотирикутнику $ABCD$ середини сторін AB та CD позначимо через E та F відповідно. Відрізки AF, BF, CE, DE та EF розділяють чотирикуник $ABCD$ на 8 трикутників, площі яких ми позначимо a, b, c, d та p, q, r, s, як це показано на рис. 10. Доведіть, що справджується рівність: $b + s = d + q$.

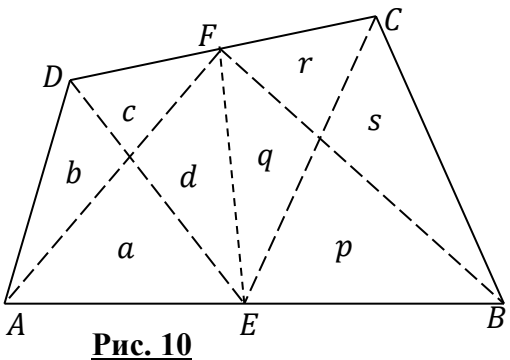

Рис. 10

Розв'язання. Зрозуміло, що справджуються така рівність: $a + d = p + q$, оскільки це рівносильне тому, що $S_{AEF} = S_{BEF}$. А це в свою чергу випливає з того, що ці трикутники мають спільну висоту та рівні основи $AE = EB$. Аналогічно $S_{CEF} = S_{DEF}$, звідки $c + d = r + q$. Віднімемо одержані дві рівності:

$$(a + d) - (c + d) = (p + q) - (r + q) \Rightarrow a - c = p - r$$
$$\Rightarrow a + r = p + c,$$

що доводить першу рівність.

Розглянемо трикутники AED, BEC та ABF з основами AE, BE та AB, їхні висоти позначимо x, y та z відповідно. З теореми Фалеса зрозуміло, що $\frac{x+y}{2} = z$. Звідси маємо, що

$$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot AE, S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot BE, S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot AB \ \Rightarrow$$

$$S_{AED} + S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot (x + y) \cdot AE = z \cdot AE = 2S_{ABF} \ \Rightarrow$$

$$a + b + p + s = a + d + p + q \ \Rightarrow \ b + s = d + q,$$

що й треба було довести.