

Задача 1. (10 балів) По прямому шосе в одному напрямку рухаються велосипедист і мотоцикліст. Швидкість велосипедиста 18 км/год, швидкість мотоцикліста 72 км/год. У початковий момент часу велосипедист знаходиться попереду мотоцикліста на відстані 600 м.

- 1) За який час мотоцикліст наздожене велосипедиста? (1 бал)
- 2) Який шлях пройдуть мотоцикліст та велосипедист до моменту зустрічі? (2 бали)
- 3) Побудуйте графік швидкості мотоцикліста відносно велосипедиста. (2 бали)
- 4) Вкажіть на цьому графіку фігуру, площа якої чисельно дорівнює початковій відстані між велосипедистом та мотоциклістом. (2 бали)
- 5) Вкажіть на цьому графіку фігуру, площа якої чисельно дорівнює відстані між велосипедистом та мотоциклістом через 10 секунд після зустрічі. (2 бали)

Правильне переведення одиниць вимірювання в СІ -1 бал.

Відсутність пояснення – зняти до 3 балів.

Розв'язок.

Переведемо швидкості у метри за секунду:

$$v_1 = 18 \text{ км/год} = 5 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 72 \text{ км/год} = 20 \text{ м/с}$$

- 1) Швидкість мотоцикліста відносно велосипедиста:

$$v_{\text{від}} = 20 - 5 = 15 \text{ м/с}$$

Мотоцикліст наздожене велосипедиста за

$$t = \ell / v_2 = 600 / 15 = 40 \text{ с}$$

- 2) За 40 с велосипедист проїде

$$s_1 = v_1 t = 5 \cdot 40 = 200 \text{ м}$$

За той самий час мотоцикліст проїде

$$s_2 = v_2 t = 20 \cdot 40 = 800 \text{ м}$$

- 3) Графік – горизонтальна пряма (див. рисунок нижче).
- 4) Фігура – прямокутник, заштрихований навскіс (див. рисунок нижче).
- 5) Фігура – прямокутник, заштрихований горизонтально (див. рисунок нижче).

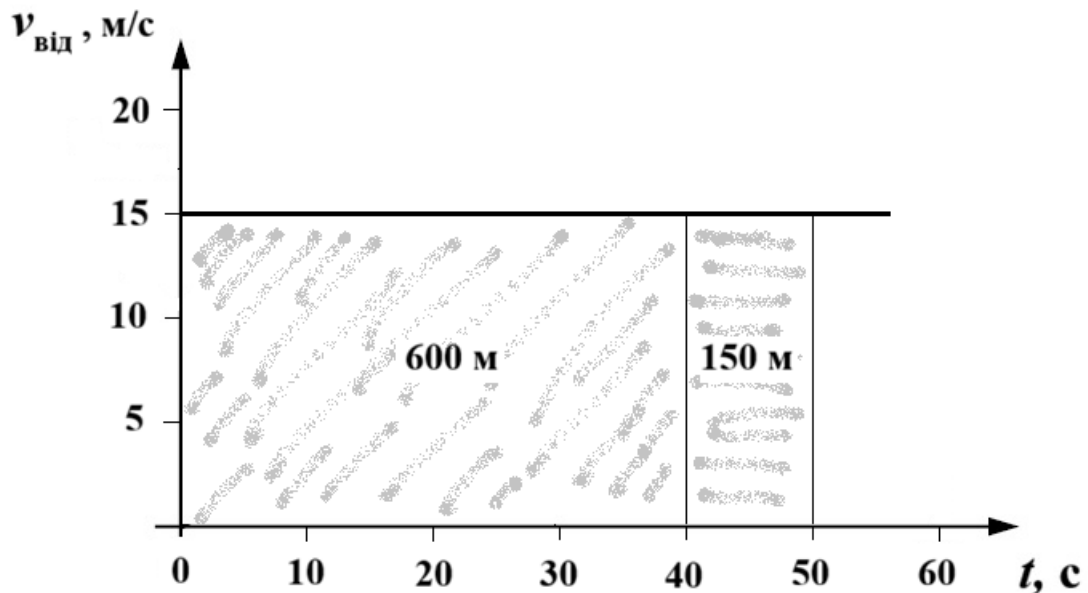


Рисунок. Графік із зазначеними фігурами до 3-5).

Задача 2. (10 балів) Площа суцільної плівки, утвореної на поверхні води краплею олії об'ємом $0,005 \text{ мм}^3$, не може бути більшою за 50 см^2 .

1) За наведеними даними оцініть розмір молекули олії. Розмір подайте у нанометрах. Опишіть припущення (фізичну модель), на якому ґрунтується Ваша оцінка. Чи може молекула мати розмір, суттєво більший за отриману оцінку? Чи може справжній розмір молекули бути суттєво меншим? (5 балів)

2) Використовуючи отриману оцінку розміру молекули олії та знаючи, що маса одного літра олії дорівнює 920 грамів, оцініть масу молекули олії. (5 балів)

Відсутність пояснень – зняти до 4 балів.

Розв'язок.

1) Чим більшу площу має плівка, утворена краплею олії, тим менша її товщина. Але товщина плівки не може бути меншою за розмір молекули. Якщо припустити, що найбільша за площею, а отже, найтонша плівка утворена одним молекулярним моношаром, то розмір молекули d можна вважати рівним товщині плівки.. Для визначення товщини спочатку виразимо площу плівки у квадратних міліметрах. Так як $1 \text{ см}^2 = 100 \text{ мм}^2$, то

$$S = 50 \text{ см}^2 = 5000 \text{ мм}^2$$

Товщина плівки:

$$h = V/S = 0,005/5000 = 0,000001 \text{ мм} = 1 \text{ нм}$$

Отже розмір молекули d приймаємо рівним 1 нм.

Справжній розмір молекули виявиться суттєво меншим, якщо моношарова плівка не може існувати. Наприклад, припустимо, що така плівка є нестійкою і розпадається на окремі острівці товщиною в декілька молекулярних шарів. Тоді для утворення суцільної плівки знадобиться декілька шарів молекул, а самі молекули виявляться меншими за товщину плівки.

Можна також придумати модель, у якій молекули олії мають форму тоненьких пластинок, що лежать на поверхні води. Для такої моделі наша оцінка відноситиметься до «товщини» окремої молекули і нічого не говоритиме про її поперечний розмір.

Разом з тим наведені гіпотези є не виправдано ускладненими, а тому отримана оцінка, ймовірно, правильно вказує на характерний масштаб молекули олії.

2) Для оцінки маси молекули приймемо, що окрема молекула займає у просторі об'єм $v=d^3=1 \text{ нм}^3$. Так як $1\text{л}=1\text{дм}^3$, а $1\text{дм}=10^{-8} \text{ нм}$, то $1\text{л}=10^{-24} \text{ нм}$. Отже, 1 літр олії містить $N=10^{24}$ молекул. Маса одного літра олії $m=920 \text{ г}=9,2 \cdot 10^{11} \text{ нг}$. Тоді, маса окремої молекули:

$$m_0 = m/N = 9,2 \cdot 10^{-13} \text{ нг}$$

Коментар до отриманої оцінки від авторів задачі. Масу молекули доцільно виразити в атомних одиницях маси. Так як $1 \text{ а.о.м.} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,6605 \cdot 10^{-15} \text{ нг}$, то $m_0 = 920 / 1,6605 \approx 554 \text{ а.о.м.}$ Насправді олія є сумішшю жирних кислот і має середню молекулярну масу 275-286 а.о.м. Тобто ми отримали досить точну, хоч і дещо завищену оцінку.

Задача 3. (10 балів) Кільцева траса мототреку складається із двох однакових прямолінійних ділянок **AB**, **CD** і двох криволінійних ділянок **BD**, **CA**, які мають форму напівкіл однакового радіусу (рис.1). Загальна довжина траси дорівнює 900 м.

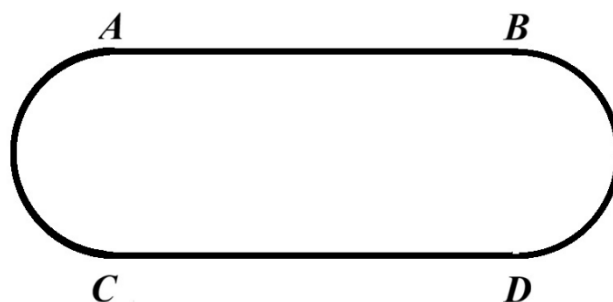


Рисунок 1.

Мотоцикліст на тренуванні проходить одне коло по трасі за 40 секунд, витрачаючи на кожну із чотирьох ділянок однаковий час. При цьому на криволінійних ділянках він рухається із постійною швидкістю v_1 , а середня швидкість на прямолінійних ділянках перевищує v_1 на 25%.

1) Знайдіть довжину кожної ділянки траси. (3 бали)

2) Знайдіть швидкість v_1 та середню швидкість мотоцикліста на прямолінійній ділянці. (3 бали)

3) На рисунку 2 показано залежність швидкості мотоцикліста від часу на прямолінійній ділянці траси. Знайдіть максимальну швидкість мотоцикліста. (4 бали)

Відсутність пояснень – зняти до 3 балів.

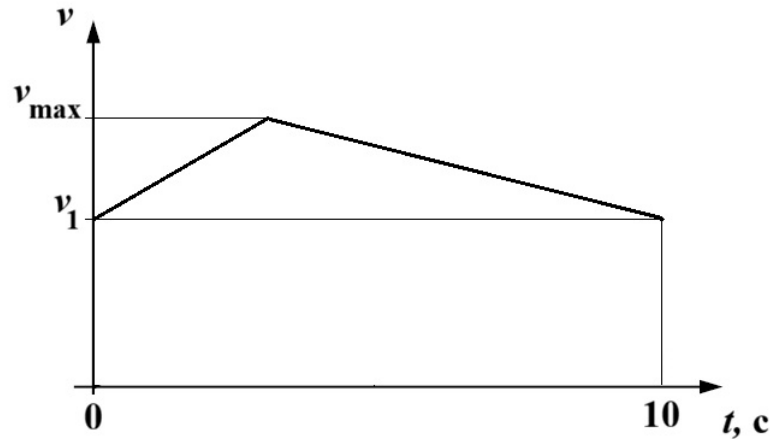


Рисунок 2.

Розв`язок.

1) Так як мотоцикліст проходить прямолінійну ділянку і поворот за однаковий час, а швидкість на прямолінійній ділянці є більшою на 25%, то і довжина прямолінійної ділянки на 25% більша за довжину повороту:

$$\ell_2 = 1,25 \ell_1$$

Повна довжина траси є сумою довжин двох поворотів та двох прямолінійних ділянок:

$$2\ell_1 + 2\ell_2 = 2\ell_1 + 2,5\ell_1 = 4,5\ell_1 = 900 \text{ м}$$

Довжина повороту:

$$\ell_1 = 900 / 4,5 = 200 \text{ м}$$

Довжина прямолінійної ділянки:

$$\ell_2 = 1,25 \cdot 200 = 250 \text{ м}$$

2) На кожен ділянку мотоцикліст витрачає $t = 40 / 4 = 10$ с. Тоді швидкість у повороті:

$$v_1 = \ell_1 / t = 200 / 10 = 20 \text{ м/с}$$

Середня швидкість на прямій:

$$v_{2,\text{ср}} = \ell_2 / t = 250 / 10 = 25 \text{ м/с}$$

3) Довжина прямолінійної ділянки чисельно дорівнює площі фігури під графіком швидкості:

$$\ell_2 = 0,5 \cdot (v_1 + v_{\max}) \cdot t$$

Виразимо із останнього співвідношення $v_{\max}$:

$$v_{\max} = 2 \ell_2 / t - v_1 = 2 \cdot 250 / 10 - 20 = 30 \text{ м/с}$$

Задача 4. (10 балів) Вероніка знімала за допомогою телефону відео руху всюдихода з колесами діаметром $d = 1,5 \text{ м}$. Потім, аналізуючи відео, зняте зі швидкістю 30 кадрів на секунду, вона встановила, що за 1 секунду колеса роблять 2 повних оберти. Загальна тривалість відео була 20 секунд. Визначити:

- 1) Обертову частоту n , період обертання T і максимальну швидкість обертання коліс всюдихода u . (2 бали)
- 2) Швидкість всюдихода v . (2 бали)
- 3) Відстань s_1 , яку проїжджає всудихід за час зйомки 1 кадру, і повну відстань s , яку він проїхав за час відеозйомки. (2 бали)
- 4) Кут повороту коліс всюдихода протягом тривалості 1 кадру φ_1 . (3 бали)
- 5) Скільки повних обертів зробили колеса всюдихода за час відеозйомки. (1 бал)

Відсутність пояснень – зняти до 3 балів.

Розв'язок.

1) За умовою задачі за 1 секунду колеса роблять 2 повних оберти, отже обертова частота коліс

$$n = \frac{2 \text{ об}}{1 \text{ с}} = 2 \frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

Період обертання коліс

$$T = \frac{1 \text{ с}}{2} = 0,5 \text{ с}.$$

Максимальна швидкість обертання коліс всюдихода (для точок колеса, максимально віддалених від осі колеса):

$$u = \frac{\pi d}{T} = \frac{3,14 \cdot 1,5 \text{ м}}{0,5 \text{ с}} = 9,42 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2) За умовою задачі за 1 секунду колеса всюдиходу роблять 2 повних оберти, тобто всудихід проходить шлях $2 \cdot \pi \cdot d = 6,28 \cdot 1,5 \text{ м} = 9,42 \text{ м}$. Отже, швидкість всюдиходу $v = 9,42 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Як і очікувалось, ця швидкість дорівнює максимальній швидкості обертання коліс всюдиходу u .

3) Вважаючи рух всюдихода рівномірним, відстань s_1 , яку проїжджає всудихід за час зйомки 1 кадру (час $1/30$ секунди), і повну відстань s , яку він проїхав за час відеозйомки (час 20 секунд) розрахуємо за формулами:

$$s_1 = v \cdot \frac{1 \text{ с}}{30} = 9,42 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1 \text{ с}}{30} = 0,314 \text{ м} \quad \text{і} \quad s = v \cdot 20 \text{ с} = 9,42 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 20 \text{ с} = 188,4 \text{ м}.$$

4) Протягом 1 кадра колеса всюдихода повертаються на nt обертів, де t – тривалість 1 кадра. Отже, $nt = 2 \frac{\text{об}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{30} \text{ с} \approx 0,067 \text{ об}$. Кожному оберту відповідає зміна кута на 360° , тому кут повороту коліс всюдихода протягом тривалості 1 кадру φ_1 дорівнює

$$\varphi_1 = 0,067 \cdot 360^\circ \approx 24,1^\circ.$$

5) Відеозйомка тривала 20 секунд, отже, колеса всюдихода за цей час зробили $2 \frac{\text{об}}{\text{с}} \cdot 20 \text{ с} = 40$ повних обертів.

Практичний тур

Задача 1. (15 балів) Срібний дріт радіусом $R = 0,5$ мм і довжиною $L = 1$ км розплавляли, причому під час цього процесу було втрачено 5% срібла. З розплаву, що залишився, виготовили срібні монети діаметром $D = 2$ см і товщиною $H = 1$ мм. Вважаючи, що дріт і монети мають форму циліндра з об'ємом $V = \pi r^2 h$ (r – радіус циліндра, h – його висота) розрахувати:

1) Початкову масу срібла M_0 до розплавлення, вважаючи, що густина срібла $\rho = 10,5$ г / см³. (2 бали)

2) Маса однієї виготовленої срібної монети m . (3 бали)

3) Кількість виготовлених срібних монет N . (3 бали)

4) Максимальну висоту вежі з виготовлених срібних монет. (2 бали)

5) Чи вмістяться всі срібні монети в скриньці пірата об'ємом 30 см $\times$ 20 см $\times$ 10 см? (3 бали)

6) Яку максимальну кількість монет зазначених розмірів можна зберігати в такій скриньці? (2 бали)

Відсутність пояснень – зняти до 5 балів.

Розв'язок.

1) Початкову масу срібла M_0 до розплавлення розраховуємо за формулою:

$$M_0 = \rho V_0 = \rho \pi r^2 l = 10,5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 3,14 \cdot (0,5 \text{ мм})^2 \cdot 1 \text{ км} = 8242,5 \text{ г}.$$

2) Маса срібної монети розраховується за формулою:

$$m = \rho V = \frac{\rho \pi D^2 H}{4} = 10,5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 3,14 \cdot \frac{(2 \text{ см})^2}{4} \cdot 1 \text{ мм} \approx 3,3 \text{ г}.$$

3) Маса срібла M , використаного для виготовлення монет складає 95% від початкової маси срібла M_0 , тобто

$$M = 0,95 M_0 = 0,95 \cdot 8242,5 \text{ г} \approx 7830,4 \text{ г}.$$

Отже, кількість виготовлених монет

$$N = \frac{M}{m} = \frac{7830,4 \text{ г}}{3,3 \text{ г}} = 2372.$$

4) Якщо всі монети скласти у вежу діаметром в 1 монету, одержимо вежу висотою

$$N \cdot H = 2372 \cdot 1 \text{ мм} = 237,2 \text{ см}.$$

5) Оскільки діаметр монети складає 2 см, на квадратну ділянку $2 \text{ см} \times 2 \text{ см} = 4 \text{ см}^2$ можна покласти тільки 1 монету. Отже, один шар монет у скриньці пірата може містити не більше ніж

$$\frac{30 \text{ см} \times 20 \text{ см}}{2 \text{ см} \times 2 \text{ см}} = \frac{600}{4} = 150 \text{ монет}.$$

Для того, щоб покласти всі монети в скриньку, в ній має бути місце для

$$\frac{2372}{150} = 15,81 \rightarrow 16 \text{ шарів монет.}$$

Кожен шар монет має висоту $H = 1$ мм, тобто сумарна висота всіх шарів монет буде 16 мм, що суттєво менше за висоту скриньки 10 см. Отже, всі монети помістяться в сундучку.

6) Максимальна кількість монет в скриньці розраховується за формулою:

$$150 \cdot \frac{10 \text{ см}}{1 \text{ мм}} = 15000.$$