

Слава Україні!!!

Міністерство освіти і науки України
Національний центр "Мала академія наук України"
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики

Умови та розв'язання задач

1 тур

17 січня 2026 року

*«Вчити себе самого – благородна справа,
але ще більш благородна – вчити інших;
до речі, останнє куди легше»
Марк Твен*

6 клас

6.1. Додатні числа a та b задовольняють умову:

$$\frac{a}{b} + \frac{a+2025}{b+2025} + \frac{a+2026}{b+2026} = 3.$$

Чому може дорівнювати різниця $a - b$?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 0.

Розв'язання. Якщо припустити, що $a > b$, то в кожному з трьох дробів $\frac{a}{b}$, $\frac{a+2025}{b+2025}$ та $\frac{a+2026}{b+2026}$ чисельник буде більше за знаменник, а тому кожний з цих дробів більший за 1 і сума – більша за 3.

Аналогічно при $a < b$, то в кожному з трьох дробів $\frac{a}{b}$, $\frac{a+2025}{b+2025}$ та $\frac{a+2026}{b+2026}$ чисельник буде менше за знаменник, а тому кожний з цих дробів менший за 1 і сума – менша за 3.

Тому єдина можливість $a = b$ і $a - b = 0$.

6.2. У компанії з n людей деякі дружать поміж собою, при цьому, якщо Петрик дружить з Василем, то й Василь дружить з Петриком. Повідомлення в цій компанії передаються лише через е-мейл, при цьому кожна людина пише повідомлення лише друзям. Відомо, що кожна людина компанії може передати повідомлення кожному іншому не більше, ніж за 2 пересилання, тобто, якщо Петрик не дружить з Василем, то існує Грицько, що дружить з ними обома і через нього за 2 пересилання Петрик може передати повідомлення Василю. В момент «Х» усі, хто був друзями, перестали бути друзями і, навпаки, ті, хто не дружив, стали друзями. Чи можлива ситуація, при якій все одно кожна людина зможе передати повідомлення кожному іншому не більше ніж за 2 пересилання, якщо:

- а) $n = 5$, б) $n = 6$?

(Богдан Рубльов)

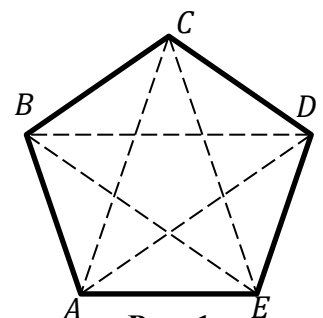


Рис. 1

Відповідь: а), б) так.

Розв'язання. а) Приклад початкового знайомства показаний на рис. 1. Відрізками з'єднані друзі, а пунктирами ті, хто стануть друзями після моменту «X». Оскільки знайомства розташовані симетрично, то треба перевірити твердження для A і B та A і C для випадків до моменту «X» та після нього. Показуємо, що умова справджується для відрізків ($-$), і для пунктирів ($\leftrightarrow$).

З самого початку $A - B$ та $A - B - C$.

Після моменту «X»: $A \leftrightarrow D \leftrightarrow B$ та $A \leftrightarrow C$.

б) Приклад початкового знайомства показаний на рис. 2. Відрізками з'єднані друзі, а пунктирами ті, хто стануть друзями після відповідного моменту. Пересвідчимося, що умова задачі справджується. Оскільки для вершин A, B, C, D та E ситуація не змінилася, то достатньо перевірити все для вершини F . При цьому достатньо перевірити лише для точок A та B , бо інші варіанти аналогічні. Показуємо, що умова справджується для відрізків ($-$), і для пунктирів ($\leftrightarrow$).

$A - F, A \leftrightarrow D \leftrightarrow F$ та $B - C - F, B \leftrightarrow F$.

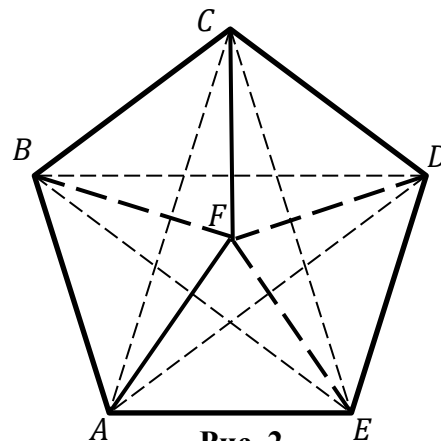


Рис. 2

6.3. Знайдіть найбільше трицифрове число $\overline{abc}$, усі цифри якого різні та ненульові, яке має такі властивості: числа $\overline{abc}$ і $\overline{bac}$ діляться націло на 3, числа $\overline{bca}$ і $\overline{cba}$ діляться націло на 4 та числа $\overline{cab}$ і $\overline{acb}$ діляться націло на 5.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 657.

Розв'язання. З умов задачі випливає, що для ненульових цифр a, b, c мають справджуватися умови: $a + b + c : 3$ та $b = 5$. Тоді залишається перевірити подільність на 4 чисел $\overline{bca}$ і $\overline{cba}$. Цифра a має бути парною, тому шукати найбільше число треба почати з чисел при $a = 8$. Але тоді число $\overline{c58}$ не ділиться на 4. Наступним за величиною є значення $a = 6$. Тоді число $\overline{c56}$ ділиться на 4. Перевіримо тепер на подільність на 4 число $\overline{5c6}$. Це можливо при $c = 1, c = 3, c = 5, c = 7$ та $c = 9$. Варіант $c = 9$ дає число $\overline{abc} = 659$, що не кратне 3. Варіант $c = 7$ дає число $\overline{abc} = 657$ є шуканим найбільшим числом.

6.4. На сторонах AD та BC квадрату $ABCD$ вибрані такі точки Q та P відповідно, що утворилися два прямокутники $ABPQ$ та $QPCD$. На відрізку PQ вибрані такі точки M та K , що точка M лежить на відрізку PK . Відоізок NM ділить прямокутник $ABPQ$ на прямокутники $ANMQ$ та $BPMN$, а відрізок KL ділить прямокутник $QPCD$ на прямокутники $PCLK$ та $LKQD$. Виявилося, що жодні два з прямокутників $ANMQ, BPMN, PCLK$ та $LKQD$ не є рівними. Чи може так статися, що два з цих чотирьох прямокутників мають рівну площу, а два інших прямокутників – рівні периметри? Прямокутники зі сторонами 2 та 3 і зі сторонами 3 та 2 різними не вважаються.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: ні.

Розв'язання. Позначимо прямокутники та довжини відповідних відрізків як на рис. 3, тобто сторона квадрата $ABCD$ дорівнює $a + b = c + d + e$.

Спочатку припустимо, що $a > b$. Тоді у прямокутника I не може бути площа чи периметр рівним з прямокутником IV , оскільки вони мають пару рівних сторін, а тому інша пара сторін – різні, що унеможливорює це. Також, прямокутник I не може мати спільну площу або периметр з прямокутником II , адже його площа та периметр завжди більші, оскільки він має більші відповідні сторони: $a > b$ та $c + d > d$.

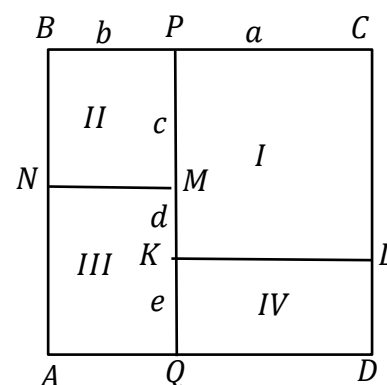


Рис. 3

Таким чином можливі рівності площ та периметрів відповідно у прямокутників, що розташовані по діагоналі.

Нехай рівні площі у I та III прямокутників, то прямокутник I має сторони a та $c + d$, у прямокутника III сторони b та $e + d$. З умови $a > b$ має випливати, що $c + d < e + d$ або $c < e$. Але тоді у прямокутників II та IV не можуть бути рівними ні площа, ні периметр, бо сторони прямокутника IV a та e більше за відповідні сторони прямокутника II b та c .

Тоді, нехай рівні площі у II та IV прямокутників. Але, аналогічно, з рівності периметрів прямокутників I та III та умови $a > b$ має випливати, що $c < e$, що приводить знову до суперечності.

Якщо розглянути випадок $a < b$, то усі міркування стають аналогічними, якщо почати розгляд з прямокутника III . Він не може мати однакову площу та периметр з прямокутником II , адже мають рівну пару сторін, а також з прямокутником IV , адже сторони прямокутника III більші за відповідні сторони прямокутника IV . Тому можуть бути рівними площа або периметр у прямокутників III та I . Далі аналогічними міркуваннями отримаємо, що не можуть співпадати ні площа, ні периметр у прямокутників II та IV .

Якщо $a = b$, то в усіх прямокутників рівні по одній стороні, тому для рівностей площ чи/та периметрів мають бути рівними і інша пара сторін, що суперечить умові.

7 клас

7.1. Квадрат зі стороною 1 розрізаний на 3 прямокутники, площі яких відносяться як 1:2:3. Якою найменшою може бути різниця між більшою стороною найбільшого за площею з цих трьох прямокутників та меншою стороною найменшого за площею прямокутника при усіх можливих розрізаннях квадрата?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Зобразимо можливі варіанти поділу квадрата належним чином. Їх рівно 4 і вони зображені на рис. 5–8. Зрозуміло, що площа найбільшого прямокутника дорівнює $\frac{1}{2}$, другого – $\frac{1}{3}$ та найменшого – $\frac{1}{6}$. Порахуємо шукану різницю для кожного з варіантів. Сторони відповідних прямокутників легко знаходяться з умови на площі.

Випадок 1 (рис. 4). Найбільший прямокутник має сторони 1 та $\frac{1}{2}$, а найменший – 1 та $\frac{1}{6}$. Тоді шукана різниця дорівнює $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Випадок 2 (рис. 5). Найбільший прямокутник має сторони 1 та $\frac{1}{2}$, а найменший – $\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{3}$. Тоді шукана різниця дорівнює $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Випадок 3 (рис. 6). Найбільший прямокутник має сторони $\frac{3}{4}$ та $\frac{2}{3}$, а найменший – $\frac{2}{3}$ та $\frac{1}{4}$. Тоді шукана різниця дорівнює $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Випадок 4 (рис. 7). Найбільший прямокутник має сторони $\frac{5}{6}$ та $\frac{3}{5}$, а найменший – 1 та $\frac{1}{6}$. Тоді шукана різниця дорівнює $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

7.2. Чи існують такі натуральні числа a , b та c , що задовольняють рівності:

$$abc(a - b)(b - c)(c - a) = (2024 \cdot 2026)^{2025}?$$

(Антон Тригуб)

Відповідь: не існують.

Розв'язання. Помітимо, що $(2024 \cdot 2026)^{2025}$ не ділиться на 3. Звідси a, b, c мають давати різні остачі при діленні на 3, щоб на 3 не ділилася жодне з чисел $a - b$, $b - c$ та $c - a$. Але на 3 ділиться одне з чисел a, b, c , що призводить до суперечності.

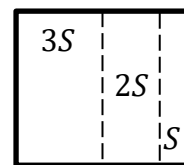


Рис. 4

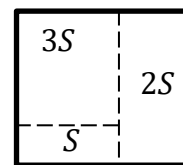


Рис. 5

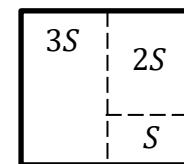


Рис. 6

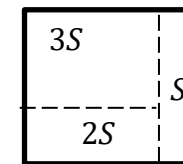


Рис. 7

7.3. У компанії з 10 людей серед довільних трьох хтось дружить з двома іншими, при цьому, якщо Петрик дружить з Василем, то й Василь дружить з Петриком. Доведіть, що цих 10 людей можна так розділити на дві групи по 5 людей в кожній, що в кожній групі усі дружать один з одним.

(Михайло Штанденко)

Розв'язання. Позначимо людей точками та з'єднаємо відрізком усіх тих, хто не є друзями. Тоді з кожної точки може виходити не більше 1 відрізка. Бо якщо з точки A не виходять відрізки в точки B та C , то трійка точок A, B, C порушує умову, оскільки в ній немає людини, що знає обох.

Таким чином серед усіх 10 точок поміж ними проведено не більше 5 відрізків, тобто людей можна розбити на пари, що з'єднані відрізком. Далі просто утворюємо шукані п'ятірки людей, взявши з кожної пари по одному представнику.

7.4. Знайдіть усі трійки цілих чисел (x, y, z) , що задовольняють рівності:

$$(x + z)^2 + (y - z)^2 = 2xy + z.$$

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $(x, y, z): (k, k, 0)$ та $(k, k + 1, 1)$, де k – довільне ціле число.

Розв'язання. Зробимо перетворення виразу таким чином:

$$\begin{aligned} (x + z)^2 + (y - z)^2 - 2xy &= x^2 + 2zx + z^2 + y^2 - 2zy + z^2 - 2xy = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2zx - 2zy - 2xy + z^2 = (x - y + z)^2 + z^2 = z. \end{aligned}$$

Оскільки числа x, y, z – цілі, то $z^2 \geq z$ та $(x - y + z)^2 \geq 0$. Щоб справджувалася наведена рівність мають справджуватися такі рівності: $x - y + z = 0$ та $z = 0$ або $z = 1$. Таким чином рівності задовольняють такі трійки цілих чисел $(x, y, z): (k, k, 0)$ та $(k, k + 1, 1)$.

8 клас

8.1. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b) , що задовольняють умови: число $b + 1$ ділиться націло на число a та число $2a + 1$ ділиться націло на число $3b$.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $(a, b): (1, 1), (4, 3)$.

Розв'язання. Для натуральних чисел, якщо x ділить y , то $x \leq y$. Запишемо ці дві умови:

$$a \leq b + 1, 3b \leq 2a + 1 \Rightarrow 3a - 3 \leq 3b \leq 2a + 1 \Rightarrow a \leq 4.$$

При $a = 1$ з умови, що число $3b$ ділить $2a + 1 = 3$ випливає, що $b = 1$ і пара $(a, b) = (1, 1)$ є першим розв'язком.

При $a = 2$ число $3b$ ділить $2a + 1 = 5$ – суперечність.

При $a = 3$ число $3b$ ділить $2a + 1 = 7$ – суперечність.

При $a = 4$ число $3b$ ділить $2a + 1 = 9$, тоді $b = 1$ або $b = 3$. При цьому число $a = 4$ має ділити $b + 1$, звідки підходить лише $b = 3$, що й дає нам другий розв'язок.

8.2. Двоцифрове число a та деяке число b , не обов'язково ціле, задовольняють умову:

$$\frac{a}{b} + \frac{a + 1}{b + 1} = 2.$$

Скільки різних значень може приймати вираз $a - b$?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 91.

Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{a + 1}{b + 1} = 2 &\Rightarrow a(b + 1) + b(a + 1) = 2b(b + 1) \Rightarrow 2ab + a + b = 2b^2 + 2b \Rightarrow \\ &a(2b + 1) = 2b^2 + b \Rightarrow a(2b + 1) = b(2b + 1). \end{aligned}$$

Таким чином умову задовольняють пари (a, b) , для яких $a = b$, а тому значення виразу $a - b = 0$. Крім того умову задовольняє довільна пара вигляду $(a, b) = \left(a, -\frac{1}{2}\right)$. Дійсно, підставимо такі значення в умову задачі і матимемо, що

$$\frac{a}{-\frac{1}{2}} + \frac{a+1}{-\frac{1}{2}+1} = -\frac{a}{\frac{1}{2}} + \frac{a+1}{\frac{1}{2}} = -2a + 2a + 2 = 2.$$

Різних двоцифрових значень для a рівно 90, від 10 до 99. Для кожного з них значення $b = -\frac{1}{2}$. Тому різних значень для різниці $a - b$ буде також 90 та усі вони будуть відмінними від 0. Тому різниця $a - b$ може приймати усього 91 різне значення.

8.3. Два кола ω_1 та ω_2 перетинаються в точках A та B . Дотична з точки A до кола ω_1 перетинає коло ω_2 вдруге в точці D , а дотична з точки A до кола ω_2 перетинає коло ω_1 вдруге в точці C . Пряма BC вдруге перетинає коло ω_2 в точці C_1 , а пряма BD вдруге перетинає коло ω_1 в точці D_1 . Доведіть, що $CC_1 = DD_1$.

(Ярослав Лук'янов)

Розв'язання. Помітимо, що $\angle AC_1B = \angle ADB$ та $\angle AD_1B = \angle ACB$. (рис. 8) Таким чином, у трикутниках ACC_1 та ADD_1 є два відповідні рівні кути, тому для того щоб довести рівність цих трикутників вистачить показати, що $AD = AC_1$. З рівності кутів $\angle ACB = \angle BAD = \angle BC_1D$ отримуємо, що $AC \parallel C_1D$, тому $\angle AC_1D = \angle CAD = \angle ADC_1$. Отже, $AD = AC_1$, $\triangle AD_1D = \triangle ACC_1$, тому й $CC_1 = DD_1$, що завершує розв'язання задачі.

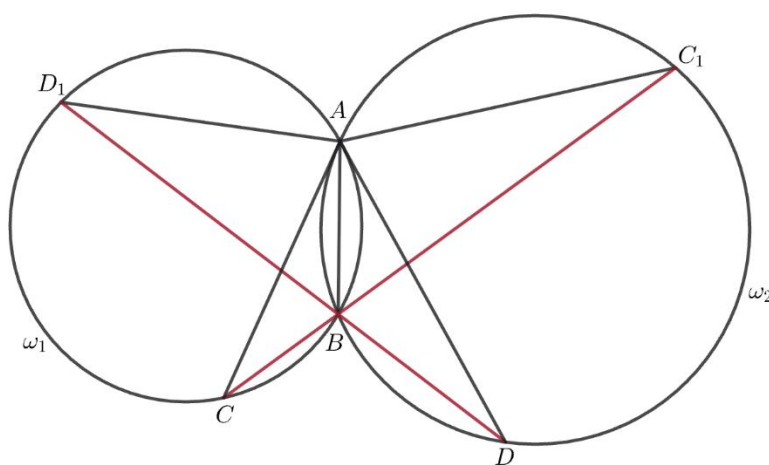


Рис. 8

8.4. У київському клубі зібралися 10 людей. Відомо, що довільних 4 людини можна розбити на 2 такі пари, що у кожній з цих пар люди мають спільного знайомого поза парою. У клубі немає того, хто знає більше людей, ніж Микола. Знайдіть найменшу можливу кількість знайомих, які може мати Микола.

(Михайло Нижник)

Відповідь. 4.

Розв'язання. Якщо Коля має не більше 3 знайомих, то кожен з цих знайомих має не більше двох окрім Колі, тому Коля має щонайбільше 6 знайомих для його знайомих. Тоді знайдеться четвірка що містить Колю і не містить жодного з його знайомих знайомих, і для неї не справджується умова задачі, адже у трійці, що не містить Колю, ніхто не знайомий зі знайомими Колі.

Покажемо, що Коля може мати 4 знайомих. Розташуємо усіх людей по колу, та нехай знайомими будуть усі пари сусідів та усі що стоять по колу через один (рис. 9). Тоді кожен має спільного знайомого з кожним окрім діаметрально протилежного йому. Тоді в кожній четвірці є максимум дві пари, що не мають спільних знайомих, а тому їх можна розбити на пари що мають спільних знайомих, отже умова задачі виконується.

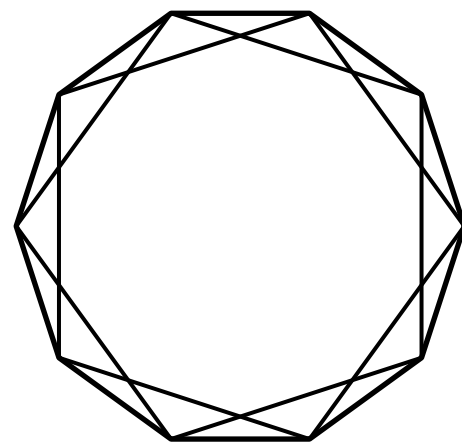


Рис. 9

8.5. Знайдіть всі четвірки чисел (n, p, q, r) , де n – натуральне число, а p, q, r – прості числа, що задовольняють рівності: $p^2 + 2qr = 6^n + 1$.

(Олексій Масалітін)

Відповідь: (2,3,2,7), (2,3,7,2), (2,5,2,3) та (2,5,3,2).

Розв'язання. З умов задачі очевидно, що p – непарне, а тому $p > 2$. Тоді адже $p^2 + 2qr > 7$, то $n \geq 2$. Якщо $q, r > 2$, тобто вони непарні числа, тому $p^2 + 2qr \equiv 1 + 2 \equiv 3 \pmod{4}$. Але це суперечить тому, що при $n \geq 2$ число $6^n + 1 \equiv 1 \pmod{4}$. Таким чином, принаймні одне з чисел q, r дорівнює 2. Нехай без обмеження загальності $q = 2$, адже задача симетрична відносно q та r .

Припустимо, що $p \neq 3$ та $r \neq 3$. Тоді $6^n + 1 \equiv p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, звідки

$$2qr = 4r = 6^n + 1 - p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow r = 3$$

і отримали суперечність. Тобто принаймні одне з чисел p чи r дорівнює 3.

Помітимо також, що з непарності p випливає, що $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$, звідки при $n \geq 3$

$$2qr = 4r = 6^n + 1 - p^2 \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow r = 2, p = 3,$$

і підібрати шукане n неможливо. Таким чином $n = 2$ і маємо два випадки.

Випадок 1. Якщо $p = 3$, тоді $9 + 4r = 37 \Rightarrow r = 7$ і маємо такий розв'язок: (2,3,2,7).

Випадок 2. Якщо $r = 3$, тоді $p^2 + 12 = 37 \Rightarrow p = 5$ і маємо такий розв'язок (2,5,2,3).

З симетричності відносно q та r маємо наведені 4 розв'язки.

9 клас

9.1. Додатні числа a та b задовольняють умову:

$$\frac{a-1}{b-1} + \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} = 3.$$

Чи обов'язково звідси випливає, що $a = b$?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: не обов'язково.

Розв'язання. Покладемо, наприклад, $a = 1$ та $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тоді матимемо, що

$$\frac{a-1}{b-1} + \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} = \frac{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}-1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1} = \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} = 3.$$

Щоб придумати цей приклад достатньо просто звести все до спільного знаменника та визначити a з отриманого рівняння:

$$\begin{aligned} (a-1)b(b+1) + a(b-1)(b+1) + (a+1)b(b-1) &= 3b(b-1)(b+1) \Rightarrow \\ ab^2 + ab - b^2 - b + ab^2 - a + ab^2 + b^2 - ab - b &= 3b^3 - 3b \Rightarrow \\ 3ab^2 - 2b - a &= 3b^3 - 3b \Rightarrow a(3b^2 - 1) = 3b^3 - b. \end{aligned}$$

Якщо $3b^2 - 1 = 0$, то рівність справджується. Тому ми й обрали для прикладу число $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Якщо ж $3b^2 - 1 \neq 0$, то обов'язково $a = b$.

9.2. Скількома способами можна в один рядок записати у деякому порядку числа 1, 2, ..., 10 так, щоб усі прості числа йшли зліва направо у порядку зростання, а усі складені числа – у порядку спадання? Наприклад, розстановка чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 – умову не задовольняє, а розстановка 1, 2, 3, 5, 7, 10, 9, 8, 6, 4 – задовольняє.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 1260.

Розв'язання. Вибираємо позицію для числа 1, це можна зробити 10 способами. Далі вибираємо 4 позиції для простих чисел. Їх можна вибрати $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ способами, серед яких буде $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ однакових перестановок, тому усього маємо 126 способів. Після цього на обрані позиції прості числа розставляються однозначно – у порядку зростання, а на решту 5 позицій так само однозначно розставляються складені числа. Таким чином усього $126 \cdot 10 = 1260$ способів.

9.3. Всередині гострокутного трикутника ABC обрано точку P , а на сторонах AC та AB – точки Y та Z відповідно так, що $PA = PY = PZ$. На відрізку BC знайшлася така точка X , що $\angle XZP = \angle ABC$ та $\angle XYP = \angle ACB$. Доведіть, що AH – висота $\triangle ABC$.

(Михайло Баркулов)

Розв'язання. Спершу покажемо, що точки A, X, Y, Z лежать на одному колі (рис. 10).

Справді,

$$\begin{aligned} \angle AZP + \angle AYP + \angle PZX + \angle PYX = \\ \angle ZAP + \angle YAP + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ. \end{aligned}$$

Оскільки точка P – центр описаного кола $\triangle AYZ$, то $PA = PX = PY = PZ$. Помітимо, що

$$\angle BAX = \frac{1}{2} \angle ZPX = 90^\circ - \angle PZX = 90^\circ - \angle ABC.$$

Таким чином, $\angle BAX + \angle ABX = 90^\circ$ звідки й отримуємо, що AH – висота трикутника ABC .

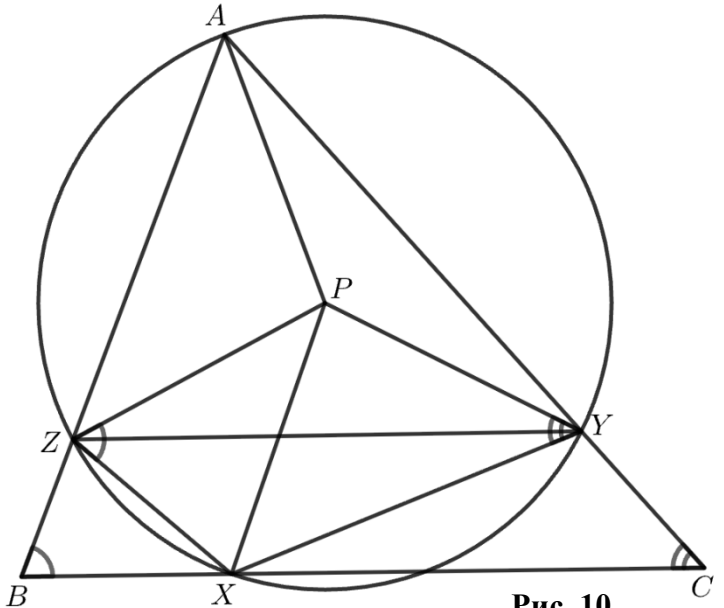


Рис. 10

9.4. Додатні числа a, b, c, d є довжинами сторін деякого, не обов'язково опуклого, чотирикутника. Чому може дорівнювати найбільше можливе значення виразу

$$\frac{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}?$$

(Вадим Соломка)

Відповідь. 1.

Розв'язання. З нерівності трикутника усі числа вигляду $a+b+c-d$ – додатні. Запишемо нерівність між середніми для двох додатних чисел $a+b+c-d$ та $b+c+d-a$:

$$\sqrt{(a+b+c-d)(b+c+d-a)} \leq \frac{(a+b+c-d) + (b+c+d-a)}{2} = b+c.$$

Якщо виписати усі чотири такі аналогічні нерівності, та розглянемо їх добуток, то отримаємо, що:

$$(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c) \leq (a+b)(b+c)(c+d)(d+a).$$

Звідси випливає, що

$$\frac{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \leq 1.$$

Залишається помітити, що найбільше можливе значення 1 досягається, наприклад, для квадрату (чи ромбу), в якого $a = b = c = d$.

9.5. Знайдіть усі трійки цілих невід'ємних чисел (m, n, k) , що задовольняють рівності:

$$2^{(2^m)} + 3^n + 15 = k^2.$$

(Михайло Нижник)

Відповідь: $(m, n, k) = (1, 4, 10)$.

Розв'язання. Розглянемо декілька випадків.

Випадок 1. Якщо $m = 0$, то маємо рівність $3^n + 17 = k^2$. При $n = 0$ маємо рівність, що не має цілих невід'ємних розв'язків: $k^2 = 18$. При $n \geq 1$ отримаємо, що $k^2 = 3^n + 17 \equiv 2 \pmod{3}$, що є суперечністю.

Випадок 2. Якщо $m = 1$, то $3^n + 19 = k^2$. Тоді k – парне число, тому $k^2 \equiv 0 \pmod{4}$, тому має бути $3^n \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow n = 2a$. Тоді початкове рівняння можна переписати таким чином:

$$3^{2a} + 19 = k^2 \Rightarrow k^2 - 3^{2a} = 19 \Rightarrow (k - 3^a)(k + 3^a) = 1 \cdot 19 \Rightarrow k - 3^a = 1, k + 3^a = 19.$$

Звідси знаходимо, що $k = 10, 3^a = 9 \Rightarrow a = 2$ та $n = 4$, що дає перший розв'язок.

Випадок 3. Якщо $m \geq 2$, то $2^{(2^m)} : 16$. Тоді з початкового рівняння число k – парне.

Спочатку розглянемо задане рівняння за модулем 16:

$$3^n - 1 \equiv k^2 \pmod{16}.$$

Легко помітити, що $3^n - 1 \equiv 0, 2, 8, 10 \pmod{16}$ та для парного k маємо, що $k^2 \equiv 0, 4 \pmod{16}$. Таким чином $n \equiv 0 \pmod{4}$.

З іншого боку, розглянемо початкове рівняння за модулем 5. Помітимо, що $2^x \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$, але коли $x = 2^m$, тобто коли $4 \mid x$, то $2^x \equiv 1 \pmod{5}$. Отже $3^n + 1 \equiv k^2 \pmod{5}$. Оскільки $k^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$, то $3^n = k^2 - 1 \equiv 4, 0, 3 \pmod{5}$. Таким чином $3^n \equiv 3, 4 \pmod{5}$, а це відповідає випадкам $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$.

Як бачимо, що ці випадки несумісні, а тому для випадку 3 розв'язків не існує.

Тому знайдений у випадку 2 розв'язок $(m, n, k) = (1, 4, 10)$. – єдиний.

10 клас

10.1. На координатній площині задані 6 точок: $A(-2, -2)$, $B(-1, -3)$, $C(0, 2)$, $D(1, -1)$, $E(2, 6)$ та $F(3, 13)$. Яка найбільша кількість з цих точок можуть лежати на параболі $y = ax^2 + 2ax + b$ при деяких дійсних числах a та b ?

Відповідь: 4.

Розв'язання. Припустимо точки $A(-2, -2)$ та $B(-1, -3)$ лежать на одній параболі. Знайдемо коефіцієнти a та b . Для цього треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2 = 4a - 4a + b, \\ -3 = a - 2a + b, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2, \\ a = 1, \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 2x - 2.$$

Перевіримо, що цій параболі належать також точки $E(2, 6)$ та $F(3, 13)$. Неважко переконатися, що вказаного типу парабола може визначатися однозначно двома точками. Таким чином, якщо розглянути будь-яку пару точок з множини $\{A, B, E, F\}$, то ми отримаємо туж саму параболу. Якщо розглянути пару точок $\{C, D\}$, то на цій параболі може лежати не більше однієї з точок A, B, E, F , бо пара тих точок визначає вже знайдену параболу. Усі інші варіанти також гарантують, що на іншій параболі не може лежати більше 3 точок, тому шукана відповідь 4.

Альтернативне розв'язання. Перепишемо рівняння параболі таким чином: $y = a(x + 1)^2 + b - a$. Тоді, якщо точка $M(p, q)$ лежить на параболі $y = a(x + 1)^2 + b - a$, то точка $N((p + 1)^2, q)$ лежить на прямій

$$y = ax + b - a = cx + d.$$

Розглянемо точки, що відповідатимуть заданим точкам: $A_1(1, -2)$, $B_1(0, -3)$, $C_1(1, 2)$, $D_1(4, -1)$, $E_1(9, 6)$ та $F_1(16, 13)$. Для спрощення подальшого простіше їх зобразити в системі координат, що з'ясувати, яка їх найбільша кількість може лежати на одній прямій (рис. 11).

Неважно пересвідчитися, що точки A_1 , B_1 , E_1 та F_1 лежать на одній прямій $y = x - 3$. На жодній іншій прямій не дежить більше ніж 2 точки.

Відповідно можна виписати в явному вигляді і параболу, на якій лежать точки A , B , E та F . Для прямої $y = x - 3$ маємо, що $a = 1$ та $b - a = -3$, тому $b = -2$. Звідси парабола має таке рівняння: $y = x^2 + 2x - 2$.

10.2. Знайдіть таке найменше натуральне число $n \geq 3$, що для довільних n дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, не обов'язково різних, існують такі три індекси $1 \leq i < j < k \leq n$, для яких

$$x_i x_j + x_j x_k + x_k x_i \geq 0.$$

(Антон Тригуб)

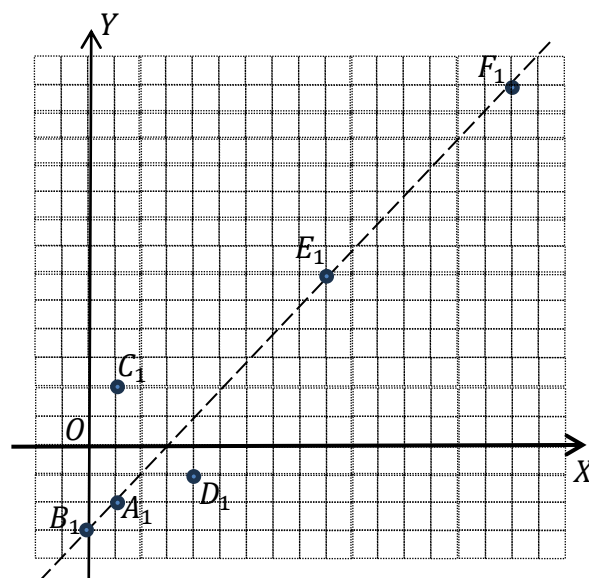


Рис. 11

Відповідь: 5.

Розв'язання: Приклад, що $n = 3$ недостатньо може бути таким: числа $-1, -1, 1$.

Для $n = 4$ маємо такий приклад чисел: $1, 1, -1, -1$. Для кожних трьох індексів відповідний вираз завжди дорівнюватиме -1 .

При $n \geq 5$ принаймні 3 з 5 чисел будуть або невід'ємними, або недодатними, які й задовольнятимуть умову.

10.3 Трикутник ABC вписаний у коло ω . На прямій BC обрано деякі точки P та Q так, що вони лежать у порядку P, B, C та Q . Відрізки AP та AQ перетинають вдруге коло ω в точках E та F відповідно. Виявилося, що серединні перпендикуляри до відрізків EP та FQ дотикаються кола ω . Доведіть, що $AP = AQ$.

(Георгій Жилінський)

Розв'язання. Нехай серединні перпендикуляри до відрізків EP та FQ дотикаються ω в точках X та Y відповідно (рис. 12). З властивості кута між дотичною та хордою, а також з рівнобедреності трикутника PXE отримуємо, що $\angle EAX + \angle PEX = 90^\circ$. На колі ω оберемо точку $Z \neq E$ так, що $XE = XZ$ звідки $90^\circ = \angle PEX + \angle EAX = \angle AZX + \angle XAZ$, тому $\angle AXZ = 90^\circ$ та відрізок AZ — діаметр описаного кола $\triangle ABC$. Оскільки трикутник EPZ — прямокутний та $XE = XP = XZ$, то $X \in PZ$. Помітимо, що $\angle AZP = \angle PEX = \angle EPX = \angle APZ$, тобто $AP = AZ$, аналогічно $AQ = AZ$, тому $AP = AQ$.

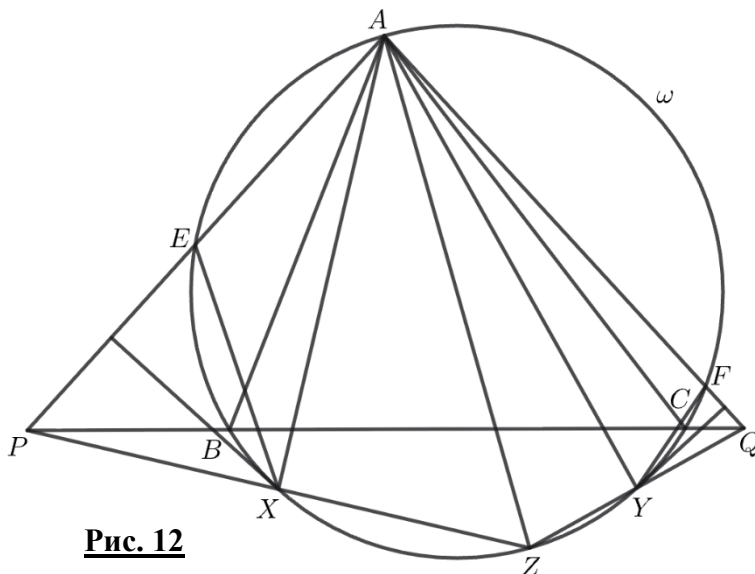


Рис. 12

10.4. Для натурального числа n позначимо через $d(n)$ найбільший дільник числа n , що не перевищує $\sqrt{n}$. Наприклад, $d(2) = 1$, $d(6) = 2$, $d(9) = 3$. Доведіть, що для кожного натурального числа $k \geq 2$ існує нескінченно багато натуральних чисел, які мають рівно k натуральних дільників та які не можна подати у вигляді $n + d(n)$ для деякого натурального n .

(Микита Харін)

Розв'язання. Покажемо, що числа вигляду p^{k-1} , де p є непарним простим числом, задовольняють умові. Легко бачити, що таке число має k натуральних дільників. Припустимо, що $n + d(n) = p^{k-1}$. Нехай $n = d(n)b$, де b — таке натуральне, для якого справджується нерівність:

$$b = \frac{n}{d(n)} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \geq d(n).$$

Тепер з припущення маємо $d(n)(b + 1) = p^{k-1}$. Тому для деяких цілих невід'ємних a та c $d(n) = p^a$ та $b + 1 = p^c$. Оскільки $b + 1 > d(n)$, то $c > a$. Тепер

$$n = p^a(p^c - 1) = p^a(p - 1)(p^{c-1} + \dots + 1).$$

Але для таких множників маємо $p^a(p - 1) \geq 2p^a > p^a$, $p^{c-1} + \dots + 1 > p^{c-1} \geq p^a$ та одне з цих чисел не більше за $\sqrt{n}$. Тому $d(n)$ не може дорівнювати p^a , що означає, що такі числа не можна подати в потрібному вигляді. Оскільки простих чисел нескінченно багато, то й цих чисел нескінченно багато, що завершує доведення.

10.5. Деяка країна має скінченну кількість міст, одне з яких є столицею. Відомо, що між деякими містами цієї країни прокладено шосе (такі міста будемо називати *сусідніми*), причому від будь-якого міста можна дістатися до будь-якого іншого (можливо через

інші міста) єдиним чином, не повертаючись у вже проїхані міста. Таке сполучення називатимемо *шляхом* між цими містами. Довжина шляху – це кількість усіх міст, через які проходить цей шлях, а k -тою областю країни називатимемо усі міста, які сполучені зі столицею шляхом довжини k . З кожного міста виходить щонайбільше 3 шосе, окрім столиці, з якої виходить щонайбільше 2 шосе. У кожному місті можуть працювати таксисти, причому спочатку в кожному місті деякої області працює однакова кількість таксистів, а в інших областях таксистів немає. Щодня голова таксомоторної компанії може виконати одну з двох таких операцій:

- обрати місто, з якого виходить три шосе та перевести у кожне з трьох сусідніх з ним міст деяку однакову кількість таксистів з обраного міста;
- обрати місто, з якого виходить три шосе та однакову кількість таксистів з кожного з трьох сусідніх міст і перевести цих таксистів в обране місто.

Виявилося, що в деякий момент часу в кожній області або взагалі немає таксистів, або знаходиться однакова кількість таксистів. Доведіть, що в цей момент всі таксисти працюють в одній області.

(Вадим Соломка)

Розв'язання. Запишемо умову мовою графів. Міста – це вершини, шосе – ребра. Тоді в нас є бінарне дерево з вершиною в столиці. Таксисти – це камінці, що розташовані в певній вершині. Області – це яруси графа знизу доверху. Позначимо через $1, 2, \dots, n$, позначимо енергією камінця на рівні i через 2^i . Тоді при кожному перенесенні камінців відбувається закон збереження енергії, тобто якщо 3 камінці з рівня i переходять один на рівень $i + 1$ та два на рівень $i - 1$, тоді була енергія $3 \cdot 2^i$, стала $2^{i+1} + 2 \cdot 2^{i-1} = 3 \cdot 2^i$. Аналогічно в зворотному напрямку, якщо три камінці з двох рівнів переходять на один.

Припустимо можлива ситуація, при якій камінці лежать щонайменше на двох ярусах. Нехай загальна кількість s , які розподілилися по l камінців на $m \geq 2$ ярусах, тобто $s = lm$. Тоді енергія на початку та наприкінці мають бути рівними, тобто:

$$s2^i = l(2^{i_1} + \dots + 2^{i_m}) \Rightarrow m2^i = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_m}.$$

Без обмеження загальності вважаємо, що $i_1 > \dots > i_m$. Очевидно, що $i_m < i$. Ліва частина останньої рівності ділиться націло на 2^{i_m+1} , а права – ні. Одержана суперечність завершує доведення.

11 клас

11.1. Знайдіть усі пари цілих чисел (a, b) , що задовольняють рівності:

$$a^3 - 5ab + 10b = 8.$$

(Марія Рожкова)

Відповідь: $a = 2, b$ – довільне ціле число.

Розв'язання. Зробимо такі перетворення заданої рівності:

$$a^3 - 8 - 5ab + 10b = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a^2 + 2a + 4) - 5b(a - 2) = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a^2 + 2a + 4 - 5b) = 0.$$

Таким чином пара $(a, b) = (2, b)$ задовольняє умову для довільного цілого числа b .

Покажемо, що інших розв'язків не існує, тобто що така рівність неможлива:

$$a^2 + 2a + 4 - 5b = 0 \Leftrightarrow (a + 1)^2 = 5b - 3.$$

Таким чином права частина має остачу 2 при діленні на 5. Квадрат цілого числа при діленні на 5 може давати остачі 0, 1 та 4, а тому наведена рівність не справджується, що й завершує доведення.

11.2. Петрик та Василь грають у гру, роблячи ходи по черзі, починає Петрик. На столі лежить декілька купок з камінцями. Якщо в кожній купці однакова кількість камінців, то той, чий хід – програє. Інакше, гравець, чий хід, вибирає довільні дві купки з різною кількістю камінців, наприклад, n та m камінців, де $n > m$. Після цього він ділить більшу

купку на дві, що містять m та $n - m$ камінців. Хто переможе в цій грі, якщо кожний хоче перемогти і на початку гри маємо дві купки камінців, що містять 2025 та 1010 камінців відповідно?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: Петрик.

Розв'язання. Припустимо, що на початку маємо дві купки з n та m камінцями, де $n > m$. Надалі такі купки будемо просто позначати через n, m за кількістю камінців в них. Нехай $d = \text{НСД}(n, m)$. Покажемо, що якщо наприкінці гри у кожній купці k камінців, тобто однакова кількість, тоді $k = d$. При поділі купок n та m на три купки $n - m$, m та m маємо, що $\text{НСД}(n - m, m) = d$. Тобто НСД кожних двох купок, що є на столі дорівнює d . Якщо усі купки k , то $k \geq d$.

З іншого боку, якщо наприкінці усі купки k , то купка n поділилася на декілька купок k та купка m поділилася на декілька купок k , а тому $k \mid n$, $k \mid m \Rightarrow k \mid d$, а тому $k \leq d$. Таким чином $k = d$.

Як висновок, наприкінці гри буде $\frac{m+n}{d}$ купок по d камінців. Тобто їхня кількість не залежить від послідовності ходів, бо після кожного ходу кількість купок збільшується на 1, після ходу Петрика, що починає, на дошці стає непарна кількість купок, а після ходу Василя – парна. Тому переможець визначається, як би гравці не грали.

За умовами $n = 2025$, $m = 1010$, легко побачити, що $\text{НСД}(2025, 1010) = 5$. Таким чином наприкінці гри буде $\frac{2025+1010}{5} = 607$ купок, тобто буде зроблене 605 ходів. Таким чином Василь має зробити 606-й хід, але не може його зробити і програє.

11.3. У коло ω з центром у точці O вписано такий п'ятикутник $ABCDE$, для якого прямі AE та BD паралельні. На діагоналях AC та CE обрано такі точки X та Y відповідно, що $\angle EDY = \angle CDB$ та $\angle ABX = \angle CBD$. Доведіть, що описані кола $\Delta DY O$ та $\Delta BX O$ вдруге перетинаються на колі ω .

(Матвій Курський)

Розв'язання. Помітимо, що $\Delta ABX = \Delta DEY$, оскільки $AB = DE$, $\angle ABX = \angle CBD = \angle DEY$ та $\angle BAX = \angle CDB = \angle EDY$. Оскільки існує поворот з центром в точці O , який переводить рівні трикутники ABX та DEY один в інший, то $OX = OY$, а також, з властивостей повороту, $\angle XBO = \angle YEO$ (рис. 13).

Позначимо точку Z , як симетричну до точки C відносно серединного перпендикуляра до відрізка XY , тоді $\Delta XZO = \Delta YCO$ і $\angle XZO = \angle YCO$. Доведемо, що описане коло ΔBOX проходить через точку Z . Адже ΔOCE рівнобедрений, тоді справджується така рівність кутів:

$$\angle XZO = \angle OCE = \angle CEO = \angle XBO,$$

отже чотирикутник $XZBO$ вписаний, що і потрібно було довести. Аналогічно можна довести, що описане коло $\Delta DY O$ також проходить через точку Z , що й завершує доведення твердження.

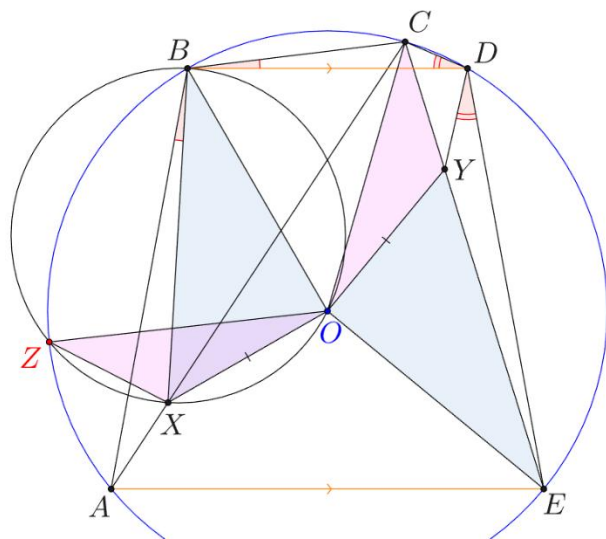


Рис. 13

11.4. Маємо довільне 2026-цифрове натуральне число n . Доведіть, що цифри цього числа можна так переставити місцями, що отримане 2026-цифрове число буде складеним.

(Антон Тригуб)

Розв'язання. Якщо принаймні одна з цифр 0, 2, 4, 5, 6 чи 8, то ми можемо поставити її в кінець, і отримати складене число, тому вважатимемо, що n містить лише цифри 1, 3, 7 або 9.

Принаймні одна з цифр зустрічається принаймні 200 разів, скажімо x , нехай y – це будь-яка інша цифра. Поставимо 100 цифр x і цифру y в кінець в якомусь порядку, і розставимо інші цифри будь-

яким способом. Таким чином, наше число може мати вигляд $A + x \cdot (1 + 10 + \dots + 10^{100}) + (y - x) \cdot 10^i$ для довільного $0 \leq i \leq 100$, де A утворене першими 1925 цифрами.

Помітимо, що $1, 10, \dots, 10^{15}$ дають різні ненульові остачі по модулю 17 (для цього достатньо помітити, що $10^8 \equiv -1 \pmod{17}$). Отже, якщо $A + x \cdot (1 + 10 + \dots + 10^{100})$ не ділиться на 17, то знайдеться перестановка цифр, що ділиться на 17.

Якщо в A не всі цифри однакові, то ми можемо поміняти в ньому місцями дві сусідні різні цифри, змінивши остачу A по модулю 17 (адже для цифр $d_k \neq d_{k+1}$ маємо, що різниця $\overline{d_k d_{k+1}} - \overline{d_{k+1} d_k} = 9(d_k - d_{k+1})$ не ділиться на 17), і зробити так, щоб попередній процес вдався. Отже, єдиний випадок, що лишився, це коли n містить 2025 цифр x і одну цифру y (оскільки A містить хоч одну цифру x). Тоді наше число має вигляд $x \cdot \frac{10^{2026}-1}{9} + (y - x) \cdot 10^i$ для якогось $0 \leq i \leq 2025$. Але $\frac{10^{2026}-1}{9}$ не ділиться на 17, тому процес вдасться.

11.5. Знайдіть найменше натуральне n таке, що для довільних n дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, не обов'язково різних, існують такі 4 індекси $1 \leq i < j < k < l \leq n$, що

$$x_i x_j x_k x_l + x_i + x_j + x_k + x_l \geq -3.$$

(Антон Тригуб)

Відповідь: 7.

Розв'язання: Приклад, чому 6 чисел недостатньо такий: $0, 0, 0, -4, -4, -4$. Для довільних чотирьох обраних чисел їх добуток буде рівний 0, а сума буде не більша за -4 . Покажемо, що семи чисел достатньо.

Спершу, припустимо, що є принаймні чотири числа, які не перевищують -1 , тоді можна вибрати їх в якості шуканого набору. Дійсно, якщо $a, b, c, d \leq -1$, то $abcd + a + b + c + d = a(bcd + 1) + b + c + d$, а тому при заміні a на -1 це значення не збільшиться. Якщо всі чотири числа рівні -1 , маємо $1 - 1 - 1 - 1 = -3$.

Припустимо тепер, що принаймні чотири числа $a, b, c, d \geq -1$. Розглянемо випадки.

- Якщо вони всі від'ємні, то знову маємо $abcd + a + b + c + d = a(bcd + 1) + b + c + d$; при заміні a на -1 значення цього виразу не збільшується, і якщо всі чотири числа рівні -1 , значення виразу рівно -3 .
- Якщо вони всі невід'ємні, то значення виразу ≥ 0 .
- Якщо $a, b \geq 0, -1 \leq c, d \leq 0$, то $abcd + a + b + c + d \geq 0 + 0 + 0 - 1 - 1 = -2$.
- Якщо $a \geq 0, -1 \leq b, c, d \leq 0$, то $a(bcd + 1) + b + c + d \geq 0 - 1 - 1 - 1 = -3$.

Отже, єдиний варіант, що лишився, це три числа $x, y, z \leq -1$, і чотири числа a, b, c, d з $a, b, c \geq 0, -1 \leq d \leq 0$. Покажемо, що серед них також знайдуться необхідні чотири числа.

Спершу, розглянемо $abcd + a + b + c + d$. Якщо $abc \leq 1$, то $abcd + a + b + c + d \geq -1 - 1 = -3$. Інакше $abc \geq 1$, а отже добуток якихось двох з них ≥ 1 , без обмеження загальності $ab \geq 1$. Тоді $abx + a + b + x + y \geq xy + x + y = (x + 1)(y + 1) - 1 \geq -1$.